الرياضيات التطبيقية

الجزء الخاص بالإجابات

2021



الاستاتيكا

المحاضر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3 ثانوى

المعاصر

الرياضيات التطبيقية

الاستاتيكا

الجزء الخاص بالإجابات



3

ثانوى

إعداد نخبة من خبراء التعليم

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢/٠٢

إجابات تمارين تراكمية على ما سبقت دراسته في الاستاتيكا من الكتاب المدرسى

١

① (جـ)　② (د)

٢

بفرض أن قياس الزاوية بين القوتين الثانية ، الثالثة هى ى

∵ القوى الثلاثة متزنة

∴ محصلة القوتين ٥ ، ٦ تساوى فى المقدار القوة ٤

∴ $(٤)^{٢} = (٥)^{٢} + (٦)^{٢} + ٢ \times ٥ \times ٦ \times$ ما ى

∴ ما ى $= \frac{-٣}{٤}$　∴ ى $= ١٣٨^{\circ}\ ٣٥'$

٣

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامى :

∴ $\frac{٦٠٠}{\text{ما } ٩٠^{\circ}} = \frac{\text{و}}{\text{ما } ١٥٠^{\circ}} = \frac{\text{س}}{\text{ما } ١٢٠^{\circ}}$

∴ $\frac{٦٠٠}{١} = \frac{\text{و}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{س}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ و = ٣٠٠ ث جم ، س = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ ث جم

٤

∵ $(٢٥)^{٢} + (٦٠)^{٢}$

$= (٦٥)^{٢}$

∴ Δ ا حـ ب قائم الزاوية فى حـ

، من قاعدة لامى : ∴ $\frac{٢٦}{\text{ما } ٩٠^{\circ}} = \frac{\text{س}_{١}}{\text{ما هـ}_{١}} = \frac{\text{س}_{٢}}{\text{ما هـ}_{٢}}$

، ∵ ما هـ$_{١}$ $= \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{٦٠}{٦٥} = \frac{١٢}{١٣}$

، ما هـ$_{٢}$ $= \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{٢٥}{٦٥} = \frac{٥}{١٣}$

∴ $\frac{٢٦}{١} = \frac{\text{س}_{١}}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{\text{س}_{٢}}{\frac{٥}{١٣}}$

∴ س$_{١}$ $= \frac{١٢}{١٣} \times ٢٦ = ٢٤$ نيوتن

، س$_{٢}$ $= \frac{٥}{١٣} \times ٢٦ = ١٠$ نيوتن

٥

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{١٢}{\text{ما } ١٥٠^{\circ}} = \frac{٩}{\text{ما هـ}}$

$= \frac{\text{و}}{\text{ما } (٣٠^{\circ} + \text{هـ})}$

∴ ما هـ $= \frac{٣}{٨}$

∴ ق (د هـ) $= ٢٢^{\circ}\ ٠'$　∴ و = ١٨,٩ نيوتن

٦

∵ المستويين أملسان

∴ س$_{١}$ ، س$_{٢}$ عموديان على المستويين ويمران بمركز الكرة ،

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{س}_{١}}{\text{ما } ١٥٠^{\circ}} = \frac{\text{س}_{٢}}{\text{ما } ٩٠^{\circ}} = \frac{٣٠}{\text{ما } ١٢٠^{\circ}}$

∴ س$_{١}$ (رد فعل المستوى الرأسى) $= ١٠\sqrt{٣}$ ثقل جم

∴ ض$_{١}$ $= ١٠\sqrt{٣}$ ثقل جرام

، س$_{٢}$ (رد فعل المستوى المائل) $= ٢٠\sqrt{٣}$ ثقل جم

∴ ض$_{٢}$ $= ٢٠\sqrt{٣}$ ثقل جرام

٧

∵ $(\text{ا ب})^{٢} = (\text{ا حـ})^{٢} + (\text{حـ ب})^{٢}$

∴ حـ ب = ٨٠ سم

، ما هـ$_{١}$ $= \frac{٤}{٥}$

، ما هـ$_{٢}$ $= \frac{٣}{٥}$

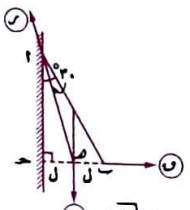
بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{س}_{١}}{\text{ما هـ}_{١}} = \frac{\text{س}_{٢}}{\text{ما هـ}_{٢}} = \frac{٢٠}{\text{ما } ٩٠^{\circ}}$

∴ $\frac{\text{س}_{١}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{\text{س}_{٢}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٢٠}{١}$

∴ س$_{١}$ = ١٦ نيوتن ، س$_{٢}$ = ١٢ نيوتن

٨



∵ المجموعة متزنة

∴ ر يمر بالنقطة هـ

، بفرض أن : ب حـ = ٢ ل

∴ ا ب = ٤ ل　∴ ا حـ = ٢ $\sqrt{٣}$ ل

∴ ا هـ = $\sqrt{١٣}$ ل

∵ Δ ا هـ حـ هو مثلث القوى

، بتطبيق قاعدة مثلث القوى :

∴ $\frac{\text{و}}{٢\sqrt{٣}\ \text{ل}} = \frac{\text{ق}}{\text{ل}} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{١٣}\ \text{ل}}$

∴ ق $= \frac{\sqrt{٣}}{٦}$ و ، ر $= \frac{\sqrt{٣٩}}{٦}$ و

إجابات
تمارين

الوحدة الأولى

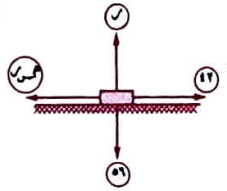


الاحتكاك

إجابات تمارين 1

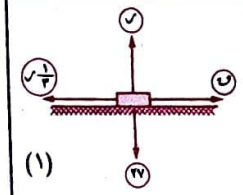
١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب)
⑤ (د) ⑥ (جـ) ⑦ (أ) ⑧ (ب)
⑨ (أ) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (أ)

٢



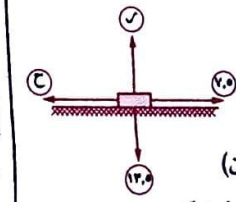
∵ الجسم على وشك الحركة
∴ ر = ٥٦
، ∵ ٤٢ = ع_س ر
∴ ٤٢ = ع_س × ٥٦ ∴ ع_س = $\frac{٣}{٤}$

٣



∵ الاحتكاك نهائى
∴ معادلتا الاتزان هما :
و = $\frac{١}{٣}$ ر (١)
، ر = ٢٧ (٢)
وبالتعويض من (٢) فى (١) :
∴ و = $\frac{١}{٣}$ × ٢٧ = ٩ ث.كجم

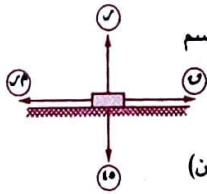
٤



فى حالة الاحتكاك النهائى
ح_س = ع_س ر = $\frac{٢}{٣}$ ر
، ر = ١٣,٥ (الجسم متزن)
∴ ح_س = $\frac{٢}{٣}$ × ١٣,٥ = ٩ ث.كجم
، ∵ و = ٧,٥ ث.كجم ، الجسم متزن
∴ ح = و = ٧,٥ ∴ ح > ح_س
∴ الاحتكاك ليس نهائيًا
∴ $\frac{ح}{ح_س} = \frac{٧,٥}{٩} = \frac{٥}{٦}$ أى أن : ح = $\frac{٥}{٦}$ ح_س

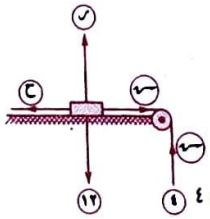
٥

القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة هى :



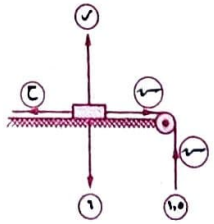
و = ع_س ر
، ∵ ر = ٤٥ (الجسم متزن)
∴ و = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ × ٤٥ ∴ و = ١٥ $\sqrt{٣}$ ث.كجم
، رد الفعل المحصل
ر' = ر $\sqrt{١ + ع_س^٢}$ = ٤٥ $\sqrt{١ + \frac{١}{٣}}$ = ٤٥ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
∴ ر' = $\frac{٩٠}{\sqrt{٣}}$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم
، ظا ل = ع_س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
∴ قياس زاوية الاحتكاك ل = ٣٠°
∴ رد الفعل المحصل يصنع مع الرأسى زاوية قياسها ٣٠°

٦



∵ الجسم متزن
∴ ح = سـ = ٤ نيوتن
، ر = ١٢
، ∵ ع_س ر = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤
∴ ح = ع_س ر = ٤
∴ الجسم على وشك الحركة

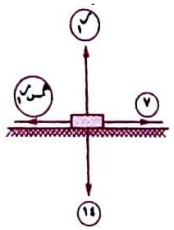
٧



∵ الجسم المعلق متزن
∴ سـ = ١,٥ ث.كجم
، ∵ الكتلة الخشبية على النضد متزنة
∴ سـ = ح = ١,٥ ث.كجم ، ر = ٦
، ∵ ح_س = ع_س ر = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ ث.كجم

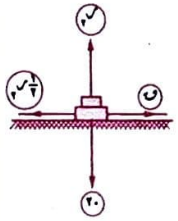
∴ ح > ح_س ∴ الاحتكاك ليس نهائى
∴ الجسم ليس على وشك الحركة

٨



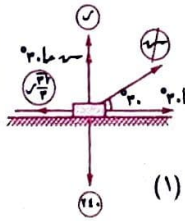
• **الجسم فقط :**
∵ الجسم على وشك الحركة
∴ ع_س ر_١ = ٧ ، ر_١ = ١٤
∴ ع_س × ١٤ = ٧
∴ ع_س = $\frac{١}{٢}$

• **الجسم بعد وضع الصنج :**



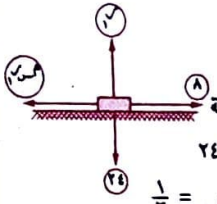
∵ الجسم على وشك الحركة.
∴ $\frac{١}{٢}$ ر_٢ = و
، ر_٢ = ٢٠
∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ = و
∴ و = ١٠ ث.كجم

٩



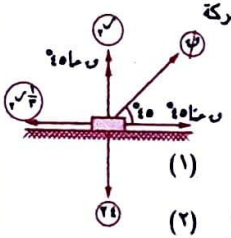
∵ الجسم على وشك الحركة
∴ سـ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ر
∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سـ = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ × ر = ر (١)
∴ ر = $\frac{٣}{٢}$ سـ
، ر + سـ جا ٣٠° = ٢٤٠
∴ $\frac{١}{٢}$ سـ + سـ = ٢٤٠
وبالتعويض من (١) :
∴ $\left(\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}\right)$ سـ = ٢٤٠
∴ ٢ سـ = ٢٤٠
∴ سـ = ١٢٠ ث.كجم

١٠



• **فى حالة القوة الأفقية :**
∵ الجسم على وشك الحركة
∴ ٨ = ع_س ر_١ ، ر_١ = ٢٤
∴ ٨ = ٢٤ ع_س ∴ ع_س = $\frac{١}{٣}$

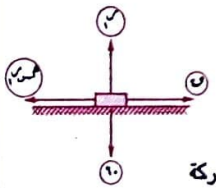
• **فى حالة القوة المائلة :**



∵ الجسم على وشك الحركة
∴ و جتا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ ر_٢
∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ و = $\frac{١}{٢}$ ر_٢
∴ ر_٢ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ و (١)
، ر_٢ + و جا ٤٥° = ٢٤ (٢)
وبالتعويض من (١) فى (٢) :
∴ $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ و + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ و = ٢٤ ∴ $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ و = ٢٤
∴ و = ٢٤ × $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ ث.كجم

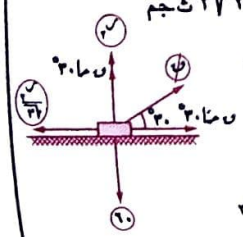
١١

• **فى حالة القوة الأفقية :**
معامل الاحتكاك السكونى
ع_س = ظا ل = ظا ٣٠°
= $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



، ∵ الجسم على وشك الحركة
∴ و = ع_س ر_١ ، ر_١ = ٦٠
∴ و = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ٦٠ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

• **فى حالة القوة المائلة :**



∵ الجسم على وشك الحركة
∴ و جتا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ر_٢

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $س_2$

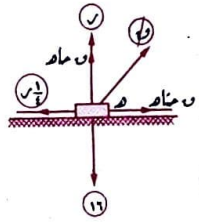
∴ $س_2$ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ق (١)

، $س_2$ + ق جا ٣٠° = ٦٠

وبالتعويض من (١) : ∴ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق = ٦٠

∴ ٢ ق = ٦٠ ∴ ق = ٣٠ ث.جم

١٢



∴ معادلتا الاتزان هما :

ق منا هـ = $س_1$

∴ ق × $\frac{3}{5}$ = $\frac{1}{4}$ س

∴ س = $\frac{12}{5}$ ق (١)

، س + ق جاهـ = ١٦

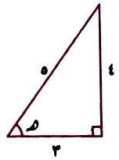
∴ س + $\frac{4}{5}$ ق = ١٦ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\frac{12}{5}$ ق + $\frac{4}{5}$ ق = ١٦

∴ $\frac{16}{5}$ ق = ١٦

∴ ق = ٥ ث.كجم ، س = ١٢ ث.كجم



∴ $ر_1$ = $\sqrt{س^2 + م^2_{س}}$ = $\sqrt{12^2 + 1}$ = $\frac{\sqrt{17}}{4}$ × ١٢

= ٣ $\sqrt{17}$ ث. كجم

، ∵ ظا ل = $\frac{1}{4}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك ل = ٢ً ١٤°

∴ رد الفعل المحصل يصنع مع الرأسى

زاوية قياسها ٢ً ١٤°

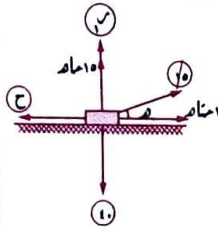
١٣

∵ الجسم متزن

∴ ح = ق منا هـ

= $\frac{4}{5}$ × ١٥

= ١٢ نيوتن



● **بعد زيادة القوة :**

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ٢٠ منا هـ = $س_2$

∴ ٢٠ × $\frac{4}{5}$ = $س_2$

∴ $س_2$ = ١٦ (١)

، ٢٠ جاهـ + $س_2$ = ٤٠

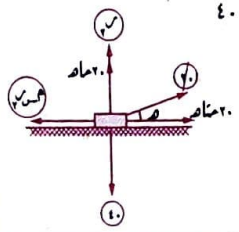
∴ ٢٠ × $\frac{3}{5}$ + $س_2$ = ٤٠

∴ $س_2$ = ٢٨

وبالتعويض فى (١) :

∴ س × ٢٨ = ١٦

∴ س = $\frac{16}{28}$ = $\frac{4}{7}$



١٤

∵ الجسم فى حالة اتزان نهائى

∴ ق منا ٣٠° = س س

∴ ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = س س

∴ س س = ٦ (١)

، $ر_1$ = ق جا ٣٠° + ٤ $\sqrt{3}$

∴ $ر_1$ = ٤ × $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ + ٤ $\sqrt{3}$ = ٦ $\sqrt{3}$

وبالتعويض فى (١) :

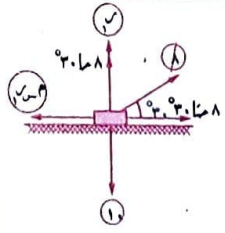
∴ س × ٦ $\sqrt{3}$ = ٦ ∴ س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ظا ل = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠°

، $ر_2$ = $\sqrt{س^2 + م^2_{س}}$ = $\sqrt{6^2 + 3}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $ر_2$ = ٦ $\sqrt{3}$ × $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = ١٢ نيوتن

١٥



● **فى الحالة الأولى :**

∵ الجسم على

وشك الحركة

∴ ٨ منا ٣٠° = $س_1$

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٨ = $س_1$

∴ $س_1$ = ٤ $\sqrt{3}$

، ٨ جا ٣٠° + ن = ١٠

∴ ٤ + $س_1$ = ١٠

وبالتعويض فى (١) :

∴ ٦ س = ٤ $\sqrt{3}$

∴ س = $\frac{4\sqrt{3}}{6}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

● **فى الحالة الثانية :**

∵ الجسم على

وشك الحركة

∴ ق منا ٣٠° = $س_2$

∴ ق × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $س_2$

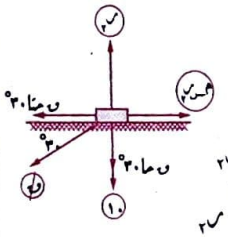
∴ $س_2$ = $\frac{2}{4}$ ق

، $س_2$ = ١٠ + ق جا ٣٠°

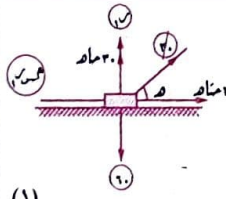
وبالتعويض من (٢) :

∴ $\frac{1}{4}$ ق = ١٠

∴ ق = ٤٠ نيوتن



١٦



● **فى الحالة الأولى :**

∵ الجسم على

وشك الحركة

∴ ٣٠ منا هـ = $س_1$ (١)

، ٣٠ جاهـ + $س_1$ = ٦٠

∴ $س_1$ = ٦٠ − ٣٠ جاهـ (٢)

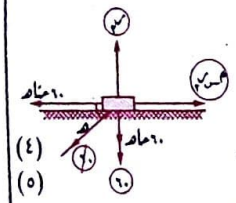
بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ٣٠ منا هـ = س (٦٠ − ٣٠ جاهـ)

∴ منا هـ = س (٢ − جاهـ)

∴ س = $\frac{\text{منا هـ}}{2 - \text{جاهـ}}$ (٣)

● **فى الحالة الثانية :**



∵ الجسم على

وشك الحركة

∴ $س_2$ = ٦٠ منا هـ (٤)

، $س_2$ = ٦٠ + ٦٠ جاهـ (٥)

بالتعويض من (٥) فى (٤) :

∴ س (٦٠ + ٦٠ جاهـ) = ٦٠ منا هـ

∴ س = $\frac{\text{منا هـ}}{1 + \text{جاهـ}}$ (٦)

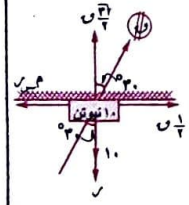
من (٣) ، (٦) : ∴ $\frac{\text{منا هـ}}{2 - \text{جاهـ}}$ = $\frac{\text{منا هـ}}{1 + \text{جاهـ}}$

∴ ٢ − جاهـ = ١ + جاهـ ∴ ١ = ٢ جاهـ

∴ جاهـ = $\frac{1}{2}$ ∴ ق (هـ) = ٣٠°

∴ س = $\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$ = $\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ = $\sqrt{3}\frac{1}{2}$

١٧



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ س + ١٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق

∴ س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق − ١٠ (١)

، س = $\frac{1}{2}$ ق

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س = $\frac{1}{2}$ ق ∴ $\sqrt{3}$ س = ق (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\sqrt{3}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق − ١٠) = ق

∴ $\frac{3}{2}$ ق − ١٠ $\sqrt{3}$ = ق ∴ $\frac{1}{2}$ ق = ١٠ $\sqrt{3}$

∴ ق = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

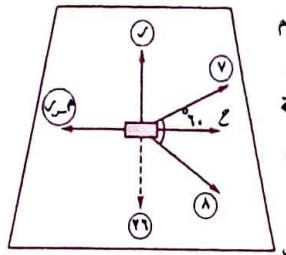
١٨

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (ب)	٤ (ب)	
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (أ)	٨ (د)	
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (أ)	
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (أ)	١٦ (د)	

١٩

$ح = \sqrt{٦٤ + ٤٩ + ٢ \times ٨ \times ٧ \times \frac{١}{٢}}$

$\therefore ح = ١٣$ ث.جم



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore ١٣ = ك س ر$

$، ر = ٢٦$

$\therefore ١٣ = ٢٦ ك س$

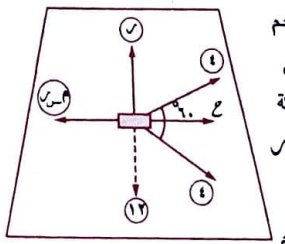
$\therefore ك س = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore$ طال $= \frac{١}{٢}$

$\therefore$ قياس زاوية الاحتكاك ل $= ٢٦^\circ ٣٤'$

٢٠

$ح = \sqrt{٤^٢ + ٤^٢ + ٢ \times ٤ \times ٤ \times \frac{١}{٢}}$

$= ٤\sqrt{٣}$ ث.كجم



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore ٤\sqrt{٣} = ك س ر$

$، ر = ١٢$

$\therefore ٤\sqrt{٣} = ١٢ ك س$

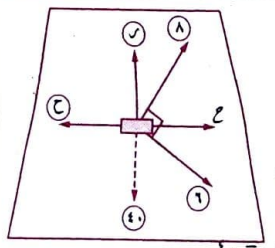
$\therefore ك س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\quad \therefore$ طال $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ قياس زاوية الاحتكاك ل $= ٣٠^\circ$

٢١

$ح = \sqrt{٣٦ + ٦٤}$

$= ١٠$



∵ الجسم متزن

$\therefore$ ح (الاحتكاك)

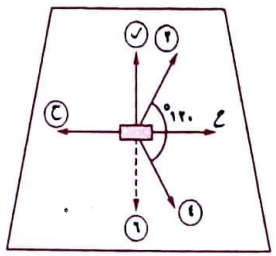
$= ح = ١٠ ، ر = ٤٠$

∵ ح $\geq$ ك س ر (الجسم متزن)

$\therefore ١٠ \geq ٤٠ ك س$ $\quad \therefore ك س \leq \frac{١}{٤}$

$\therefore$ معامل الاحتكاك السكونى يجب ألا يقل عن $\frac{١}{٤}$

٢٢



$ح = \sqrt{٤ + ١٦ + ٢ \times ٤ \times ٢ \times -\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٣}$

∵ الجسم ساكن $\therefore ح = ٢\sqrt{٣}$ ، $ر = ٦$

∵ ح $\geq$ ك س ر (الجسم ساكن)

$\therefore ٢\sqrt{٣} \geq ٦ ك س \therefore ك س \leq \frac{١}{\sqrt{٣}} \therefore$ طال $\leq \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ قياس زاوية الاحتكاك يجب ألا يقل عن ٣٠°

«طا $٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$»

، عندما قياس زاوية الاحتكاك ل $= ٤٥^\circ$

$\therefore$ طال $= ١ \quad \therefore ك س = ١$

وعندما تصبح القوة ٢ نيوتن هى ق

∵ الجسم يصبح على وشك الحركة

$\therefore \sqrt{١٦ + ق^٢ + ٢ \times ٤ \times ق \times -\frac{١}{٢}} = ك س ر$

$\therefore \sqrt{ق^٢ - ٤ ق + ١٦} = ١ \times ٦$ «بتربيع الطرفين»

$\therefore ق^٢ - ٤ ق + ١٦ = ٣٦$

$\therefore ق^٢ - ٤ ق - ٢٠ =$ صفر

$\therefore ق = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times -٢٠}}{١ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{٩٦}}{٢}$

$\therefore ق = \frac{٤ + ٤\sqrt{٦}}{٢} = ٢ + ٢\sqrt{٦}$ نيوتن

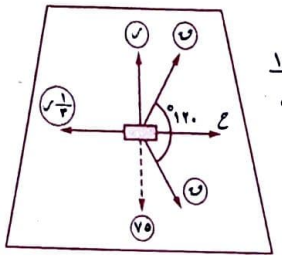
ويرفض الحل الآخر

يكون اتجاه الحركة فى اتجاه ح الذى يميل على القوة (٤) بزاوية قياسها هـ حيث

طا هـ $= \frac{(٢ + ٢\sqrt{٦}) \text{ ما } ١٢٠^\circ}{٤ + (٢ + ٢\sqrt{٦}) \text{ مثا } ١٢٠^\circ} = ٣\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٢}$

$\therefore ق (د هـ) \simeq ٨٤^\circ ٤٤'$

٢٣



$ح = ٢ ق مثا \frac{١٢٠}{٢}$

$= ٢ ق مثا ٦٠^\circ$

$= ٢ ق \times \frac{١}{٢}$

$= ق$

∵ الجسم على وشك الحركة

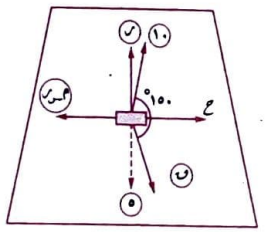
$\therefore ح = ك س ر$ $\quad \therefore ق = \frac{١}{٢} ر$ (١)

$، ر = ٧٥$ وبالتعويض فى (١)

$\therefore ق = \frac{١}{٢} \times ٧٥$ $\quad \therefore ق = ٢٥$ ث.جم

$\therefore$ مقدار كل من القوتين $= ٢٥$ ث.جم

٢٤



$ح^٢ = ١٠٠ + ق^٢ + ٢ \times ١٠ \times ق \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ح^٢ = ق^٢ - ١٠\sqrt{٣} ق + ١٠٠$

$، ك س ر =$ طال $= ط ٤٥^\circ = ١$

∵ الجسم على وشك الحركة $\therefore ر = ٥$

$، خ = ك س ر$ $\quad \therefore ح^٢ = (١ \times ٥)^٢$

$\therefore ق^٢ - ١٠\sqrt{٣} ق + ١٠٠ = ٢٥$

$\therefore ق^٢ - ١٠\sqrt{٣} ق + ٧٥ = ٠$

$\therefore (ق - ٥\sqrt{٣})^٢ = ٠$ $\quad \therefore ق = ٥\sqrt{٣}$ ث.جم

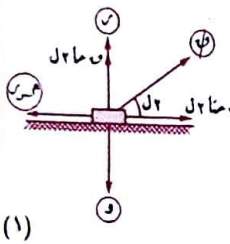
ويفرض أن اتجاه المحصلة ح يميل على القوة ١٠ ث.جم بزاوية قياسها هـ

$\therefore$ طا هـ $= \frac{٥\sqrt{٣} \text{ ما } ١٥٠^\circ}{١٠ + ٥\sqrt{٣} \text{ مثا } ١٥٠^\circ} = \sqrt{٣}$

$\therefore ق (د هـ) = ٦٠^\circ$

أى أه : الاتجاه الذى يميل الجسم إلى الحركة فيه يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع القوة ١٠ ث.جم

٢٥



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore ق مثا ٢ ل = ك س ر$

$، ك س =$ طال

$\therefore ق مثا ٢ ل = ر$ طال (١)

$، ر + ق ما ٢ ل = و$

$\therefore ر = و - ق ما ٢ ل$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore ق مثا ٢ ل =$ طال $[و - ق ما ٢ ل]$

$\therefore ق مثا ٢ ل = \frac{\text{طال}}{\text{مثال}} [و - ق ما ٢ ل]$

$\therefore ق مثا ٢ ل مثال = و$ طال $- ق$ طال ما ٢ ل

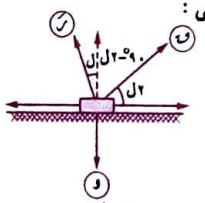
$\therefore ق [مثا ٢ ل مثال + ما ٢ ل$ طال$] = و$ طال

$\therefore ق [مثا (٢ ل - ل)] = و$ طال

$\therefore ق مثال = و$ طال $\quad \therefore ق = \frac{\text{و طال}}{\text{مثال}}$

$\therefore ق = و$ طال

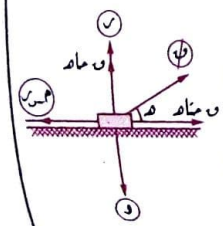
حل آخر باستخدام قاعدة لامى :



$\frac{ق}{\text{ما}(١٨٠ - ل)} = \frac{و}{\text{ما}(٩٠ - ل)} = \frac{ر}{\text{ما}(٩٠ + ٢ل)}$

$\therefore \frac{ق}{\text{مثال}} = \frac{و}{\text{مثال}}$ $\quad \therefore ق = \frac{\text{و طال}}{\text{مثال}} = و$ طال

٢٦



$ك س = ط ای$

∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore ق مثا هـ = ك س ر$

$\therefore ق مثا هـ = ر ط ای$ (١)

$، ر + ق ما هـ = و$

∴ ر = و − ن ما هـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∵ ن ما هـ = $\frac{\text{ما ى}}{\text{ما ى}}$ [و − ن ما هـ]

∴ ن ما هـ ما ى = و ما ى − ن ما هـ ما ى

∴ ن [ما هـ ما ى + ما هـ ما ى] = و ما ى

∴ ن [ما ى (ى − هـ)] = و ما ى

∴ ن = $\frac{\text{و ما ى}}{\text{ما ى (ى − هـ)}}$ (٣)

ن تكون أقل ما يمكن عندما ما ى (ى − هـ) = ١

∴ (ى − هـ) = ٠ ∴ قياس (د ى) = قياس (د هـ)

∴ ن = و ما ى

و هى أقل قوة تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.

وقياس الزاوية التى تميل بها على الأفقى يساوى قياس زاوية الاحتكاك.

١٧ ① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب)

⑤ أولًا : (أ) ثانيًا : (ب)

⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (د) ⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٧ :

① ∵ قوة الاحتكاك النهائى = ع س ر = $\frac{١}{٢}$ × ٢

= ١ نيوتن

، ∵ الجسم تحت تأثير قوة أفقية تحاول تحريكه

∴ ٠ < ع ≤ ع س ر ∴ ٠ < ع ≤ ١

∴ قوة الاحتكاك ∈]٠ ، ١]

② ∵ قوة الاحتكاك النهائى = ع س ر = $\sqrt{٣}$ × ١

= $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ∵ الجسم تحت تأثير قوة أفقية تحاول تحريكه

∴ ٠ < ع ≤ ع س ر ∴ ٠ < ع ≤ $\sqrt{٣}$

∴ قوة الاحتكاك ∈]٠ ، $\sqrt{٣}$]

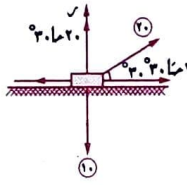
، ∵ ر = $\sqrt{\text{ر}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

∴ ر = $\sqrt{(١)^{٢} + \text{صفر}}$ = ١ عند ع = صفر

، ر = $\sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}}$ = ٢ عند ع = $\sqrt{٣}$

، ∵ ع ∈]٠ ، $\sqrt{٣}$] ∴ ر ∈]١ ، ٢]

③ من الشكل نجد أن :



ر + ٢٠ ما ٣٠° = ١٠

∴ ر = صفر

أى أن الجسم لا يلامس المستوى

∴ قوة الاحتكاك = صفر

«لاحظ أن الجسم لايتزن بل يتحرك فى الاتجاه الأفقى دون ملامسة المستوى بقوة مقدارها ٢٠ ما ٣٠°»

④ ∵ ع س = ع ر ∴ $\frac{\text{ع س}}{\text{ر}}$ = $\frac{٢٠}{٣٠}$ = $\frac{\text{و}}{٥١}$

∴ و = $\frac{٢٠ \times ٥١}{٣٠}$ = ٣٤ نيوتن

⑤ أولاً : ∵ الجسمان مصنوعان من نفس المادة وموضوعان على نفس المستوى.

∴ معاملا الاحتكاك السكونى بين الجسمين والمستوى متساويان.

أى أن : م١ = م٢

ثانيًا : بالنسبة للوزن (و)

∴ ر١ = و ، ن١ = م١ ر١ = م١ و

، بالنسبة للوزن (٥ و)

∴ ر٢ = ٥ و ، ن٢ = م٢ ر٢ = م٢ × ٥ و

= ٥ م٢ و

∴ $\frac{\text{ن}_{٢}}{\text{ن}_{١}}$ = $\frac{٥\ \text{م}_{٢}}{\text{م}_{١}}$

، ∵ م١ = م٢ ∴ $\frac{\text{ن}_{٢}}{\text{ن}_{١}}$ = ٥

∴ ن٢ = ٥ ن١

⑥ بالنسبة للجسم الذى وزنه (و)

ن = ع س ر١ = م و (١)

بالنسبة للجسم الذى وزنه (و + ٣)

ن = م (و + ٣) = م و + ٣ م (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ن = ن + ٣ م

⑦ بالنسبة للجسم الأول

ن = م ر١ = م ن١ (١)

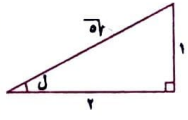
بالنسبة للجسم الثانى

ن = م ر٢ = م ن٢ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : م ن١ = م ن٢

∴ $\frac{\text{ن}_{١}}{\text{ن}_{٢}}$ = $\frac{\text{م}_{٢}}{\text{م}_{١}}$

⑧ ∵ ن١ = ع س ر



= $\frac{١}{٢}$ × ٨

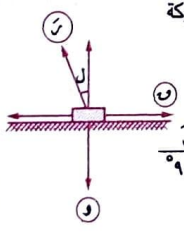
= ٤ نيوتن

، ن٢ = و ما ل = ٨ × $\frac{١}{٥\sqrt{}}$ = $\frac{٨}{٥\sqrt{}}$ نيوتن

∴ $\frac{\text{ن}_{١}}{\text{ن}_{٢}}$ = ٤ ÷ $\frac{٨}{٥\sqrt{}}$ = $\frac{٥\sqrt{}}{٢}$

⑨ ∵ الجسم على وشك الحركة

وباستخدام قاعدة لامى



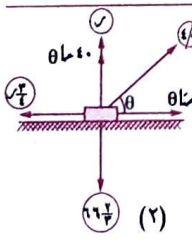
∴ $\frac{\text{ن}}{\text{ما (١٨٠° − ل)}}$ = $\frac{\text{و}}{\text{ما (٩٠° + ل)}}$ = $\frac{\text{ر}}{\text{ما ٩٠°}}$

∴ $\frac{\text{ن}}{\text{ما ل}}$ = $\frac{\text{و}}{\text{ما ل}}$ = ر

∴ ر = $\frac{\text{و}}{\text{ما ل}}$ = ن ظا ل

٢٨

∵ معادلتا الاتزان هما



٤٠ ما θ = $\frac{٣}{٤}$ ر (١)

، ر + ٤٠ ما θ = $\frac{٢}{٣}$ ٦٦

∴ ٤٠ ما θ = $\frac{٢}{٣}$ ٦٦ − ر (٢)

بتربيع (١) ، (٢) وجمعهما :

∴ (٤٠ ما θ)^{٢} + (٤٠ ما θ)^{٢}

= $\left(\frac{٣}{٤}\ \text{ر}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{٢}{٣}\ ٦٦ - \text{ر}\right)^{٢}$

∴ ١٦٠٠ (ما^{٢} θ + ما^{٢} θ)

= $\frac{٩}{١٦}$ ر^{٢} + $\frac{٤٠٠٠٠}{٩}$ − $\frac{٤٠٠}{٣}$ ر + ر^{٢}

∴ $\frac{٢٥}{١٦}$ ر^{٢} − $\frac{٤٠٠}{٣}$ ر + $\frac{٤٠٠٠٠}{٩}$ = ١٦٠٠

∴ $\frac{٢٥}{١٦}$ ر^{٢} − $\frac{٤٠٠}{٣}$ ر + $\frac{٢٥٦٠٠}{٩}$ = ٠

∴ ر = $\frac{١٢٨}{٣}$

وبالتعويض فى (١) :

∴ ما θ = $\frac{٣}{١٦٠}$ × $\frac{١٢٨}{٣}$ = $\frac{٤}{٥}$ ومنها θ ≈ ٥٢° ٣٦

حل آخر :

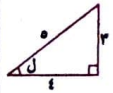
∵ معادلتا الاتزان هما

٤٠ ما θ = $\frac{٣}{٤}$ ر (١)

، ر + ٤٠ ما θ = $\frac{٢}{٣}$ ٦٦

∴ ر = $\frac{٢}{٣}$ ٦٦ − ٤٠ ما θ (٢)

من (١) ، (٢) :



∴ ٤٠ ما θ = $\frac{٣}{٤}$ ($\frac{٢}{٣}$ ٦٦ − ٤٠ ما θ)

∴ ٤٠ ما θ = ٥٠ − ٣٠ ما θ

∴ ٤٠ ما θ + ٣٠ ما θ = ٥٠ (بالقسمة على ٥٠)

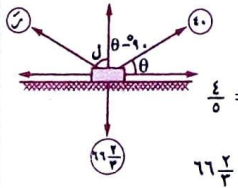
∴ $\frac{٤}{٥}$ ما θ + $\frac{٣}{٥}$ ما θ = ١

∴ ما ل ما θ + ما ل ما θ = ١

∴ ما (ل − θ) = ١ ∴ ل − θ = ٠

∴ ل = θ = ٥٢° ٣٦

حل ثالث :



∵ ع س = ط ال = $\frac{٣}{٤}$

∴ ما ال = $\frac{٣}{٥}$ ، ما ل = $\frac{٤}{٥}$

باستخدام قاعدة لامى :

$\frac{٤٠}{\text{ما (١٨٠° − ل)}}$ = $\frac{٦٦\frac{٢}{٣}}{\text{ما [٩٠ − (θ − ل)]}}$

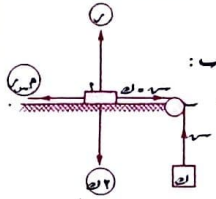
$\therefore \frac{٤٠}{\text{مال}} = \frac{٦٦\frac{٢}{٣}}{\text{منا}(\theta - ل)}$

$\therefore \text{منا}(\theta - ل) = \frac{٦٦\frac{٢}{٣} \times \text{مال}}{٤٠} = \frac{\frac{٣}{٥} \times ٦٦\frac{٢}{٣}}{٤٠} = ١$

$\therefore \theta - ل = ٠ \quad \therefore \theta = ل = ٥٢^\circ ٣٦$

٢٩

● عند تعليق الثقل ك من ب :



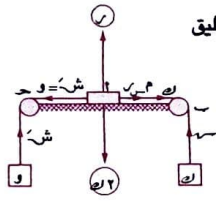
∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore ك = \text{ح}_س$ ر

، ر = ٢ ك

$\therefore ك = \text{ح}_س \times ٢ ك$ $\quad \therefore \text{ح}_س = \frac{١}{٢}$

● فى الحالة الثانية عند تعليق الوزن و عند حـ :



∵ الجسم على وشك الحركة

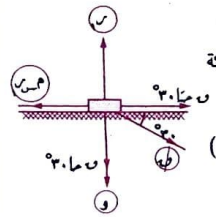
$\therefore و = ك + \text{ح}_س$ ر

، ر = ٢ ك

$\therefore و = ك + \frac{١}{٢} \times ٢ ك$ $\quad \therefore و = ٢ ك$

٣٠

● الحالة الأولى :



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore و \text{ منا } ٣٠^\circ = \text{ح}_س$ ر$_١$

$\therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢} و = \text{ح}_س$ ر$_١$ (١)

، ر$_١$ = و منا ٣٠° + و

$\therefore$ ر$_١$ = $\frac{١}{٢}$ و + و

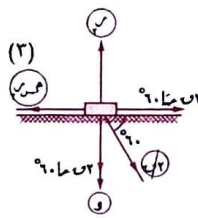
وبالتعويض فى (١) :

$\therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢} و = \text{ح}_س (\frac{١}{٢} و + و)$

$\therefore و (\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ح}_س) = \text{ح}_س و$ (٢)

● الحالة الثانية :

∵ الجسم على وشك الحركة



$\therefore ٢ و \text{ منا } ٦٠^\circ = \text{ح}_س$ ر$_٢$ (٣)

$\therefore و = \text{ح}_س$ ر$_٢$

، ر$_٢$ = و + ٢ و منا ٦٠°

$\therefore$ ر$_٢$ = و + $\sqrt{٣}$ و

وبالتعويض فى (٣) :

$\therefore و = \text{ح}_س (و + \sqrt{٣} و)$

$\therefore و (١ - \sqrt{٣} \text{ح}_س) = \text{ح}_س و$ (٤)

من (٢) ، (٤) :

$\therefore و (\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ح}_س) = و (١ - \sqrt{٣} \text{ح}_س)$

$\therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ح}_س = ١ - \sqrt{٣} \text{ح}_س$

$\therefore \text{ح}_س (\sqrt{٣} - \frac{١}{٢}) = ١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \text{ح}_س = \frac{١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\sqrt{٣} - \frac{١}{٢}} = ٠,١$

إجابات تمارين 2

١

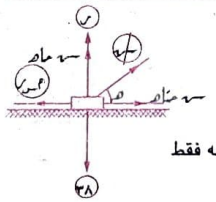
∵ طا هـ = طا ٦٠° = $\sqrt{٣}$ ، ح$_س$ = طا ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

∴ هـ > ل

∴ الجسم لايمكن أن يكون متزنًا.

٢

● على المستوى المائل :



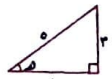
∵ الجسم على وشك

الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط

$\therefore \text{ح}_س = \text{ط هـ}$

$\therefore \text{ح}_س = \frac{١}{٤}$

● على المستوى الأفقى :



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore$ معادلتا الاتزان : $\text{ح}_س$ منا هـ = ح$_س$ ر

$\therefore \frac{٤}{٥} \text{ح}_س = \frac{١}{٤}$ ر $\quad \therefore$ ر = $\frac{١٦}{٥}$ ح$_س$ (١)

، ر + ح$_س$ منا هـ = ٣٨

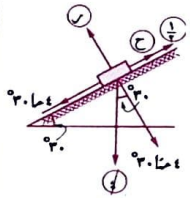
وبالتعويض من (١) :

$\therefore \frac{١٦}{٥} \text{ح}_س + \frac{٣}{٥} \text{ح}_س = ٣٨ \quad \therefore \frac{١٩}{٥} \text{ح}_س = ٣٨$

$\therefore \text{ح}_س = ٣٨ \times \frac{٥}{١٩} = ١٠$ ث.كجم

، ر = $\frac{١٦}{٥} \times ١٠ = ٣٢$ ث.كجم

٣



∵ و منا هـ = ٤ × منا ٣٠° = ٢

∴ و منا هـ < ر

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى

، ∵ الجسم متزن

$\therefore$ ح + $\frac{١}{٢}$ ر = ٤ منا ٣٠° $\quad \therefore$ ح + $\frac{١}{٢}$ ر = ٢

$\therefore$ ح = ١,٥ نيوتن

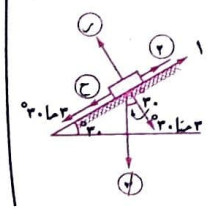
، ر = ٤ منا ٣٠° = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$

$\therefore$ ح$_س$ ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × ٢$\sqrt{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥ نيوتن

$\therefore$ ح = ح$_س$ ر

∴ الجسم يكون على وشك الحركة.

٤



∵ و منا هـ = ٣ × منا ٣٠° = ١,٥

∴ ر > و منا هـ

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل

، ∵ الجسم متزن $\quad \therefore$ ر = ح + و منا هـ

$\therefore$ ٢ = ح + ٣ × $\frac{١}{٢}$ $\quad \therefore$ ح = $\frac{١}{٢}$ نيوتن ولأسفل

، ر = ٣ منا ٣٠° $\quad \therefore$ ر = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

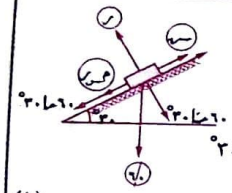
$\therefore$ ح$_س$ ر = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ ≃ ١,٧٣٢ نيوتن

$\therefore$ ح$_س$ ر > ح

∴ الاحتكاك السكونى ليس نهائيًا

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة.

٥



∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore \text{ح}_س = \text{ح}_س$ ر + ٦٠ منا ٣٠°

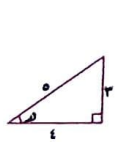
$\therefore \text{ح}_س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ر + ٣٠ (١)

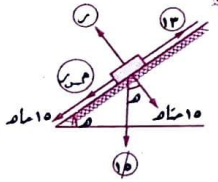
، ر = ٦٠ منا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٦٠ = ٣٠\sqrt{٣}$

، بالتعويض فى (١) : $\therefore \text{ح}_س = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times ٣٠\sqrt{٣} + ٣٠$

$\therefore \text{ح}_س = ٣٠ + ٣٠ = ٦٠$ ث.كجم

٦





∵ الجسم على وشك الحركة

$\therefore و = \text{ح}_س$ ر + و منا هـ

$\therefore ١٣ = \text{ح}_س$ ر + ١٥ × $\frac{٣}{٥}$

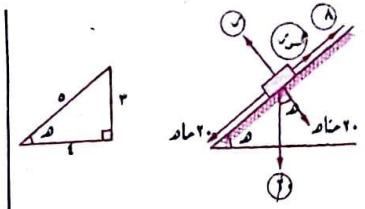
$\therefore ١٣ = \text{ح}_س$ ر + ٩ $\quad \therefore \text{ح}_س$ ر = ٤ (١)

، ر = ١٥ منا هـ = ١٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٢ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore \text{ح}_س \times ١٢ = ٤$ $\quad \therefore \text{ح}_س = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

٧



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق + م س ر = و ما هـ

∴ ٨ + م س ر = $\frac{٣}{٥}$ × ٢٠

∴ ٨ + م س ر = ١٢ ∴ م س ر = ٤ (١)

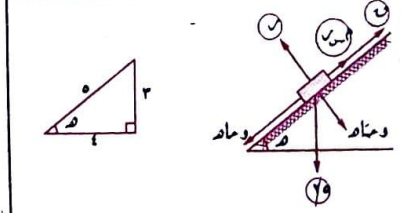
، ر = ٢٠ نا هـ = $\frac{٤}{٥}$ × ٢٠ = ١٦ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م س × ١٦ = ٤

∴ م س = $\frac{١}{٤}$ ∴ ظا ل = $\frac{١}{٤}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك ل = ١٤° ٢

٨



∵ الجسم متزن ∴ ق + م س ر = و ما هـ

∴ ق + $\frac{١}{٥}$ ر = ٢٥ × $\frac{٣}{٥}$

∴ ق + $\frac{١}{٥}$ ر = ١٥ (١)

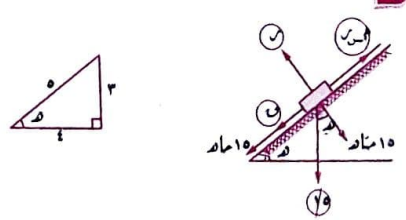
، ر = و نا هـ = ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٢٠ (٢)

، بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ق + $\frac{١}{٥}$ × ٢٠ = ١٥ ∴ ق + ٤ = ١٥

∴ ق = ١١ ث. كجم

٩



• **قبل تأثير القوة :**

∵ ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ق (د هـ) = ٥٢° ٣٦

∴ قياس زاوية الاحتكاك أكبر من قياس زاوية ميل المستوى

∴ الجسم يبقى متزنًا.

• **بعد تأثير القوة :**

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر = ١٥ نا هـ ∴ ر = ١٢ نيوتن

، م س ر = ق + ١٥ ما هـ

، ∵ م س = ظا ٤٥° = ١

∴ ١٢ = ق + ١٥ × $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق = ٣ نيوتن

١٠

• **فى الحالة الأولى : (هـ = ٦٠°)**

∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٦٠°

∴ م س = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

• **فى الحالة الثانية : (هـ = ٣٠°)**

∵ الجسم متزن بدون تأثير القوة

∴ ح = ١٨ ما ٣٠° = ١٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٩ ث. كجم

• **بعد تأثير القوة ق :**

∵ الجسم على وشك الانزلاق

∴ م س ر = ق + ١٨ ما ٣٠°

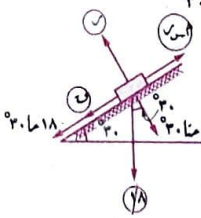
∴ $\sqrt{٣}$ ر = ق + ٩

، ر = ١٨ نا ٣٠°

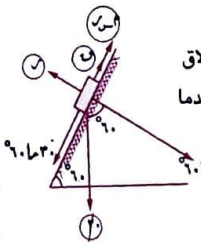
= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٨ = ٩ $\sqrt{٣}$

∴ $\sqrt{٣}$ × ٩ $\sqrt{٣}$ = ق + ٩

∴ ٢٧ = ق + ٩ ∴ ق = ١٨ ث. كجم



١١



∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى بزاوية قياسها ٣٠°

∴ م س = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

أولًا :

∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل

∴ ر = ٣٠ نا ٦٠° = ١٥

، م س ر + ق = ٣٠ ما ٦٠°

∴ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ١٥ + ق = ٣٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

ثانيًا :

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

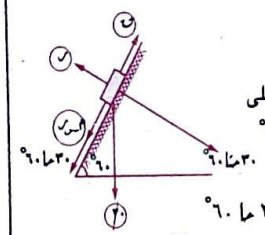
∴ ر = ٣٠ نا ٦٠°

= ١٥

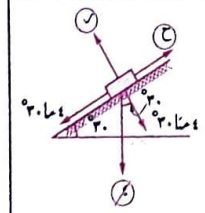
، ق = م س ر + ٣٠ ما ٦٠°

∴ ق = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ١٥ + ٣٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق = ٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن



١٢



∵ ظا هـ = ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

، م س = ظا ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

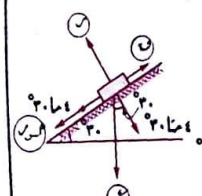
∴ هـ < ل

∴ الجسم مستقر على المستوى

أى أن الاحتكاك غير نهائى

، ع = ٤ ما ٣٠° = ٢ ث.كجم

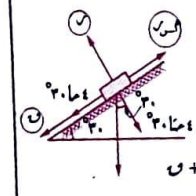
• **فى حالة وجود قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى :**



∴ ق = م س ر + ٤ ما ٣٠°

∴ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ $\sqrt{٣}$ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٥ ث.كجم (لأعلى)

• **فى حالة وجود قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل :**

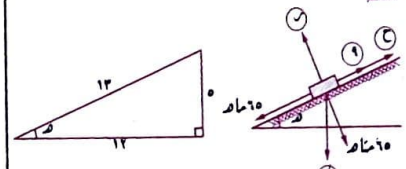


∴ م س ر = ٤ ما ٣٠° + ق

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ $\sqrt{٣}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ + ق

∴ ق = ١ ث.كجم

١٣



∵ ٦٥ ما هـ = $\frac{٦٥ \times ٥}{١٣}$ = ٢٥

∴ ق > و ما هـ

∴ قوة الاحتكاك السكونى لأعلى

∴ ح + ٩ = ٢٥

∴ ح = ١٦ نيوتن لأعلى

، ∵ ر = ٦٥ نا هـ = ٦٥ × $\frac{١٢}{١٣}$ = ٦٠

∴ م س ر = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ = ٢٠ ∴ ح > م س ر

∴ الجسم ليس على وشك الحركة ، الاحتكاك غير نهائى

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ م س ر + ق = ٢٥ ∴ ق = ٥

∴ ق تنقص من ٩ إلى ٥ نيوتن

١٤

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ق جتا ٣٠ = ه س ر + ٦٠ جا ٣٠°

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ر + ٣٠ (١)

، ر + ق جا ٣٠° = ٦٠ جتا ٣٠°

∴ ر + $\frac{١}{٢}$ ق = ٣٠ $\sqrt{٣}$

∴ ر = ٣٠ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ق (٢)

، بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ [٣٠ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ق] + ٣٠

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق = ٣٠ − $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ق + ٣٠

∴ ($\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ق = ٦٠

∴ $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ق = ٦٠

∴ ق = $\frac{٦٠ \times ٣}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{٩٠}{٣\sqrt{٣}}$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

١٥

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

= ه س ر + ١٠ جا ٣٠°

∴ ٦ = ه س ر + ٥ ∴ ه س ر = ١ (١)

، ر + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ر + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ ∴ ر = ٣ $\sqrt{٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٣ $\sqrt{٣}$ ه س = ١

∴ ه س = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ = $\frac{١}{٩}$ $\sqrt{٣}$

١٦

∵ الجسم على وشك الانزلاق

∴ ق جتا ه + ه س ر = ٣٠ جا ه

∴ $\frac{٥}{١٣}$ ق + $\frac{٢}{٣}$ ر = ٣٠ × $\frac{١٢}{١٣}$ (١)

، ر = ق جا ه + ٣٠ جتا ه = $\frac{١٢}{١٣}$ ق + $\frac{١٥٠}{١٣}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ $\frac{٥}{١٣}$ ق + $\frac{٢}{٣}$ [$\frac{١٢}{١٣}$ ق + $\frac{١٥٠}{١٣}$] = $\frac{٣٦٠}{١٣}$

∴ ٥ ق + ٢ (١٢ ق + ١٥٠) = ٣٦٠

∴ ٥ ق + ٨ ق + ١٠٠ = ٣٦٠

∴ ١٣ ق = ٢٦٠ ∴ ق = $\frac{٢٦٠}{١٣}$ = ٢٠ نيوتن

١٧

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = ٢٢ جا ه + و جتا ه

∴ ر = ٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ و (١)

، ٢٢ جتا ه = ه س ر + و جا ه

وبالتعويض من (١) :

∴ ٢٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{١١٠}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ و) + و × $\frac{٥}{١٣}$

(بالضرب × ١٣)

∴ ٢٦٤ = ٥٥ + ٦ و + ٥ و ∴ ١١ و = ٢٠٩

∴ و = ١٩ نيوتن

١٨

① (جـ)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (جـ)	
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)	
⑨ (د)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (ب)	
⑬ (ب)	⑭ (د)			

١٩

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

∴ ق = ه س ر + ١٣٠ جا ه = $\frac{٢}{٥}$ ر + ١٣٠ × $\frac{١٢}{١٣}$

∴ ق = $\frac{٢}{٥}$ ر + ١٢٠ (١)

، ر = ١٣٠ جتا ه = $\frac{٥}{١٣}$ × ١٣٠ = ٥٠

∴ ق = $\frac{٢}{٥}$ × ٥٠ + ١٢٠ = ٢٠ + ١٢٠ = ١٤٠ نيوتن

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل :

∴ ق + ه س ر = ١٣٠ جا ه

∴ ق + $\frac{٢}{٥}$ × ٥٠ = ١٣٠ × $\frac{١٢}{١٣}$

∴ ق + ٢٠ = ١٢٠

∴ ق = ١٠٠ نيوتن

٢٠

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل

(أقل قوة) :

∴ ق + ه س ر = ٥٠ جا θ

، ر = ٥٠ جتا θ

∴ ١٠ + ه س × ٥٠ جتا θ = ٥٠ جا θ

∴ ه س = $\frac{٥٠ \text{ جا } \theta - ١٠}{٥٠ \text{ جتا } \theta}$ (١)

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى

(أكبر قوة) :

∴ ق = ه س ر + ٥٠ جا θ

، ر = ٥٠ جتا θ

∴ ٤٠ = ه س × ٥٠ جتا θ + ٥٠ جا θ

∴ ه س = $\frac{٤٠ - ٥٠ \text{ جا } \theta}{٥٠ \text{ جتا } \theta}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{٥٠ \text{ جا } \theta - ١٠}{٥٠ \text{ جتا } \theta}$ = $\frac{٤٠ - ٥٠ \text{ جا } \theta}{٥٠ \text{ جتا } \theta}$

∴ ١٠٠ جا θ = ٥٠ ∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = ٣٠° ، ه س = $\frac{٥٠ \text{ جا } ٣٠° - ١٠}{٥٠ \text{ جتا } ٣٠°}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$

٢١

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل :

∴ ١ + ه س ر = و جا ٣٠°

، ر = و جتا ٣٠°

∴ ١ + ه س × و جتا ٣٠° = و جا ٣٠°

∴ ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ه س و = $\frac{١}{٢}$ و

∴ ه س = $\frac{\frac{١}{٢} \text{ و} - ١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ و}}$ (١)

• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

∴ ٣ = ه س ر + و جا ٣٠°

∴ ٣ = ه س × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و + $\frac{١}{٢}$ و

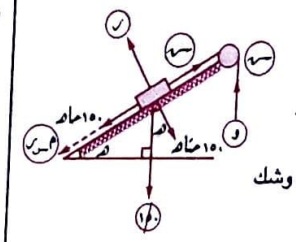
∴ ه س = $\frac{٣ - \frac{١}{٢} \text{ و}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ و}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\frac{1}{2}\text{و} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{و}} = \frac{2 - \frac{1}{2}\text{و}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{و}}$

$\therefore \frac{1}{2}\text{و} - 1 = 2 - \frac{1}{2}\text{و}$ $\therefore$ و = ٤ ث.كجم

، $\text{ه}_س = \frac{2 - 2}{\sqrt{3}\,2} = \frac{1}{\sqrt{3}\,2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\text{ه}_س = \frac{\sqrt{3}}{6}$

٢٣



عندما و = ١٢٥ $\sqrt{2}$

$\therefore$ $\text{ه}_س$ = ١٢٥ $\sqrt{2}$

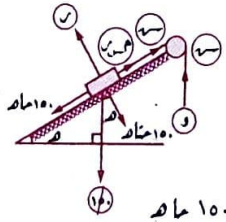
، الجسم يكون على وشك الحركة لأعلى

$\therefore$ ر = ١٥٠ مناهـ ، ١٢٥ $\sqrt{2}$ = هـ س ر + ١٥٠ مناهـ

$\therefore$ ١٢٥ $\sqrt{2}$ = هـ س × ١٥٠ مناهـ + ١٥٠ مناهـ

$\therefore$ ٥ $\sqrt{2}$ = ٦ هـ س مناهـ + ٦ مناهـ

$\therefore$ هـ س = $\frac{5\sqrt{2} - 6 \text{ مناهـ}}{6 \text{ مناهـ}}$ (١)



، عندما و = ٢٥ $\sqrt{2}$

$\therefore$ $\text{ه}_س$ = ٢٥ $\sqrt{2}$

، الجسم يكون على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ٢٥ $\sqrt{2}$ + هـ س ر = ١٥٠ مناهـ

$\therefore$ ٢٥ $\sqrt{2}$ + هـ س × ١٥٠ مناهـ = ١٥٠ مناهـ

$\therefore$ ٢٥ $\sqrt{2}$ + ٦ هـ س مناهـ = ٦ مناهـ

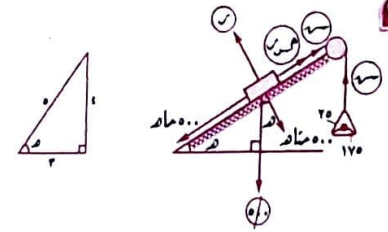
$\therefore$ هـ س = $\frac{6 \text{ مناهـ} - 2\sqrt{2}}{6 \text{ مناهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ ٦ مناهـ − ٢ $\sqrt{2}$ = ٥ $\sqrt{2}$ − ٦ مناهـ

$\therefore$ ١٢ مناهـ = ٦ $\sqrt{2}$ $\therefore$ مناهـ = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ ق (∠هـ) = ٤٥° $\therefore$ هـ س = $\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

٢٤



• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل :

$\therefore$ ٢٥ + ١٧٥ + هـ س ر = ٥٠٠ مناهـ

$\therefore$ ٢٠٠ + هـ س ر = $\frac{4}{5}$ × ٥٠٠ = ٤٠٠

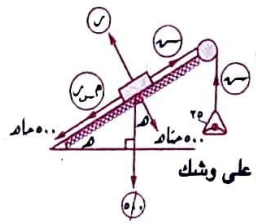
$\therefore$ هـ س ر = ٢٠٠

، ر = ٥٠٠ مناهـ = $\frac{3}{5}$ × ٥٠٠ = ٣٠٠ (١)

وبالتعويض فى (١) :

$\therefore$ هـ س × ٣٠٠ = ٢٠٠

$\therefore$ هـ س = $\frac{2}{3}$



• عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

$\therefore$ $\text{ه}_س$ = هـ س ر + ٥٠٠ مناهـ

= $\frac{2}{3}$ × ٣٠٠ + $\frac{4}{5}$ × ٥٠٠ = ٦٠٠

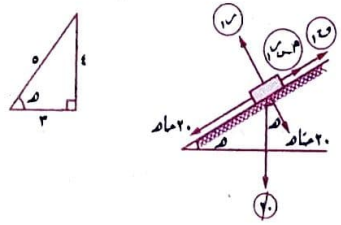
لكن وزن الكفة = ٢٥

$\therefore$ وزن الثقل = ٦٠٠ − ٢٥ = ٥٧٥ ث.جم

٢٤

• فى حالة القوة الموازية لخط أكبر ميل لأعلى :

∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل



$\therefore$ ق$_1$ + هـ س ر$_1$ = ٢٠ مناهـ

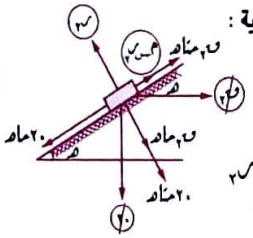
$\therefore$ ق$_1$ + هـ س ر$_1$ = ٢٠ × $\frac{4}{5}$ = ١٦ (١)

، ر$_1$ = ٢٠ مناهـ = ٢٠ × $\frac{3}{5}$ = ١٢

وبالتعويض فى (١) :

$\therefore$ ق$_1$ + ١٢ هـ س = ١٦ $\therefore$ ق$_1$ = ١٦ − ١٢ هـ س

• فى حالة القوة الأفقية :



∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل

$\therefore$ ق$_2$ مناهـ + هـ س ر$_2$

= ٢٠ مناهـ = ١٦

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ ق$_2$ + هـ س ر$_2$ = ١٦ (٢)

، ر$_2$ = ق$_2$ مناهـ + ٢٠ مناهـ = $\frac{4}{5}$ ق$_2$ + ١٢

بالتعويض فى (٢) :

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ ق$_2$ + هـ س $\left(\frac{4}{5}\text{ق}_2 + 12\right)$ = ١٦

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ ق$_2$ + $\frac{4}{5}$ هـ س ق$_2$ + ١٢ هـ س = ١٦

$\therefore$ ق$_2$ $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{هـ س}\right)$ = ١٦ − ١٢ هـ س

$\therefore$ ق$_2$ = $\frac{16 - 12\text{هـ س}}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{هـ س}}$ لكن ق$_2$ = ق$_1$

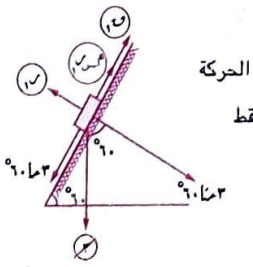
$\therefore$ $\frac{16 - 12\text{هـ س}}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{هـ س}}$ = ١٦ − ١٢ هـ س

$\therefore$ $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ هـ س = ١ $\therefore$ $\frac{4}{5}$ هـ س = $\frac{2}{5}$

$\therefore$ هـ س = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ ق$_1$ = ق$_2$ = ١٦ − ١٢ × $\frac{1}{2}$ = ١٦ − ٦ = ١٠ نيوتن

٢٥



∵ الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط

عندما هـ = ٣٠°

$\therefore$ هـ س = ظا ٣٠°

= $\frac{1}{\sqrt{3}}$

• فى حالة المستوى المائل بزاوية قياسها ٦٠° والقوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى :

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ق$_1$ + هـ س ر$_1$ = ٣ ما ٦٠°

$\therefore$ ق$_1$ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر$_1$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (١)

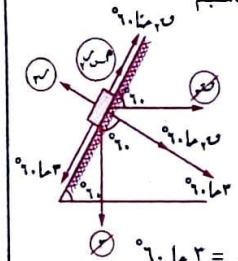
، ر$_1$ = ٣ مناهـ ٦٠° = $\frac{3}{2}$

، بالتعويض فى (١) :

$\therefore$ ق$_1$ + $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ ق$_1$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ق$_1$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ = ٣ $\sqrt{3}$ ث.كجم

• فى حالة المستوى المائل بزاوية قياسها ٦٠° والقوة أفقية :



∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ق$_2$ مناهـ ٦٠° + هـ س ر$_2$ = ٣ ما ٦٠°

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ق$_2$ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر$_2$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (٢)

، ر$_2$ = ق$_2$ ما ٦٠° + ٣ مناهـ ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق$_2$ + $\frac{3}{2}$

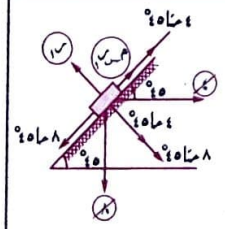
بالتعويض فى (٢) :

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ق$_2$ + $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ق}_2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ق$_2$ + $\frac{1}{2}$ ق$_2$ + $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ق$_2$ = $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}$ = ٣ $\sqrt{3}$ ث.كجم $\therefore$ ق$_1$ = ق$_2$

٢٦



∵ الجسم على وشك الانزلاق

$\therefore$ ٤ مناهـ ٤٥° + هـ س ر$_1$

= ٨ ما ٤٥°

∴ ٢√٢ + هـس س١ = ٤√٢

∴ هـس س١ = ٢√٢ (١)

، س١ = ٤ ما ٤٥° + ٨ منا ٤٥°

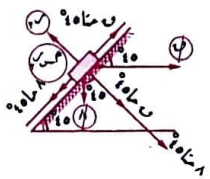
∴ س١ = ٢√٢ + ٤√٢ = ٦√٢

بالتعويض فى (١) :

∴ هـس × ٦√٢ = ٢√٢

∴ هـس = ٢√٢ / ٦√٢ = ١/٣

● القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى (أكبر قوة) :



∴ و منا ٤٥°

= هـس س٢ + ٨ ما ٤٥°

∴ ١/٢ و = ١/٢ س٢ + ٤√٢ (٢)

، س٢ = ٨ منا ٤٥° + و ما ٤٥°

∴ س٢ = ٤√٢ + ١/٢ و (٣)

بالتعويض من (٣) فى (٢) :

∴ ١/٢ و = ١/٢ (٤√٢ + ١/٢ و) + ٤√٢

∴ ١/٢ و = ٢√٢ + ١/٢ و + ٤√٢

∴ ١/٢ و − ١/٢ و = ٤√٢ + ٤√٢ = ١٦√٢/٣

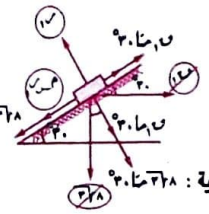
∴ ٢/٣ و = ١٦√٢/٣

∴ و = ١٦√٢/٣ × ٢/٢√٢ = ١٦ ث.كجم

٢٧

∴ هـس = طا ٣٠°

= ١/٣



● فى حالة القوة الأقفية : ٣٢٨ منا ٣٠°

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ و منا ٣٠° = هـس س١ + ٨√٣ ما ٣٠°

∴ ٣√٢/٢ و١ = ١/٣√٢ س١ + ٤√٣ (١)

، س١ = و١ ما ٣٠° + ٨√٣ منا ٣٠°

∴ س١ = ١/٢ و١ + ١٢

بالتعويض فى (١) :

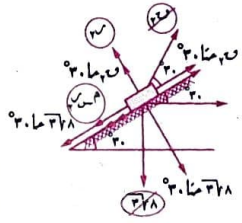
∴ ٣√٢/٢ و١ = ١/٣√٢ (١/٢ و١ + ١٢) + ٤√٣

∴ ٣√٢/٢ و١ = ١/٣√٢ ٢ و١ + ٤√٣ + ٤√٣

∴ ٢/٣√٢ ٢ و١ = ٨√٣

∴ و١ = ٨√٣ × ٣√٢ = ٢٤ ث.كجم

● فى حالة القوة التى تصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٦٠° :



∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ و٢ منا ٣٠° = هـس س٢ + ٤√٣ = ١/٣√٢ س٢ + ٤√٣

∴ ٣√٢/٢ و٢ = ١/٣√٢ (س٢) + ٤√٣ (٢)

، س١ + ١/٢ و١ = ١٢ ∴ س١ = ١٢ − ١/٢ و١

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٣√٢/٢ و١ = ١/٣√٢ (١٢ − ١/٢ و١) + ٤√٣

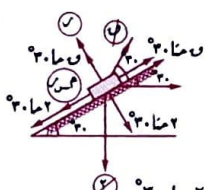
∴ ٣√٢/٢ و١ = ٤√٣ − ١/٣√٢ ٢ و١ + ٤√٣

∴ ٤/٣√٢ ٢ و١ = ٨√٣

∴ و١ = ٨√٣ × ٢/٣√٢ = ١٢ ث.كجم

٢٨

هـس = طا ٣٠° = ١/٣√٢



∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ و منا ٣٠° = هـس س + ٢ ما ٣٠°

∴ ٣√٢/٢ و = ١/٣√٢ س + ١ (١)

، س + و ما ٣٠° = ٢ منا ٣٠°

∴ س + ١/٢ و = ٢ × ٣√٢/٢ = ٣√٢

∴ س = ٣√٢ − ١/٢ و (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ٣√٢/٢ و = ١/٣√٢ (٣√٢ − ١/٢ و) + ١

∴ ٣√٢/٢ و = ١ − ١/٣√٢ ٢ و + ١

∴ ٣√٢/٢ و + ١/٣√٢ ٢ و = ٢ ∴ ٣ + ١/٣√٢ ٢ و = ٢

∴ ٢/٣√٢ و = ٢ ∴ و = ٣√٢ ث.كجم

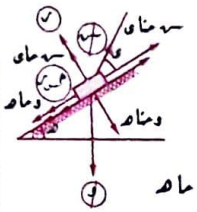
∴ س = ٣√٢ − ١/٢ ٣√٢ = ١/٢ ٣√٢

∴ قوة الاحتكاك = هـس س = ١/٣√٢ × ٣√٢/٢ = ١/٢ ث.كجم

٢٩ ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

٣٠

هـس = طا = حال / منا



∵ الحجر على وشك الحركة لأعلى

∴ هـ منا ى = هـس س + و ما هـ

∴ هـ منا ى = حال/منا س + و ما هـ (١)

، س + هـ ما ى = و منا هـ

∴ س = و منا هـ − هـ ما ى (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ هـ منا ى = حال/منا [و منا هـ − هـ ما ى] + و ما هـ

∴ هـ منا ى منا ل

= و منا هـ حال − هـ ما ى حال + و ما هـ منا ل

∴ هـ [منا ى منا ل + ما ى ما ل]

= و [منا هـ حال + ما هـ منا ل]

∴ هـ منا (ى − ل) = و ما (هـ + ل)

∴ هـ = و ما (هـ + ل) / منا (ى − ل)

∴ هـ تكون أصغر ما يمكن عندما منا (ى − ل) = ١

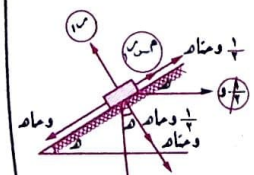
أى أن : ى = ل

∴ هـ = و ما (هـ + ل) = ١٠٠٠ ما ٣٠°

∴ هـ = ٥٠٠ ث.كجم

٣١

● القوة التى تمنع الجسم من الانزلاق :



∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ ١/٢ و منا هـ + هـس س١ = و ما هـ

، س١ = ١/٢ و ما هـ + و منا هـ

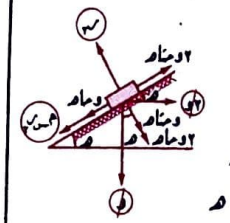
$\therefore \frac{1}{2}$ و ما^{2} + ق $\left(\frac{1}{2}\right.$ و ما^{2} + و $\text{ما}^{2}\left.\right)$ = و ما^{2}

بالقسمة على و ما^{2} :

$\therefore \frac{1}{2}$ + ق $\left(\frac{1}{2}\right.$ ظا^{2} هـ + ١$\left.\right)$ = ظا^{2} هـ

$\therefore$ ق = $\frac{\text{ظا}^{2}\text{هـ} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\text{ظا}^{2}\text{هـ} + 1}$ (١)

● **القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى :**



$\therefore$ ٢ و ما^{2} = ق ر$_{٢}$ + و ما^{2}

، ر$_{٢}$ = ٢ و ما^{2} + و ما^{2}

$\therefore$ ٢ و ما^{2} = ق (٢ و ما^{2} + و ما^{2}) + و ما^{2}

بالقسمة على و ما^{2} :

$\therefore$ ٢ = ق (٢ ظا^{2} هـ + ١) + ظا^{2} هـ

$\therefore$ ق = $\frac{٢ - \text{ظا}^{2}\text{هـ}}{٢\text{ظا}^{2}\text{هـ} + 1}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{ظا}^{2}\text{هـ} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\text{ظا}^{2}\text{هـ} + 1} = \frac{٢ - \text{ظا}^{2}\text{هـ}}{٢\text{ظا}^{2}\text{هـ} + 1}$

$\therefore$ ٢ ظا^{٤} هـ + ظا^{2} هـ − ظا^{2} هـ − $\frac{1}{2}$

= ظا^{2} هـ − $\frac{1}{2}$ ظا^{٤} هـ + ٢ − ظا^{2} هـ

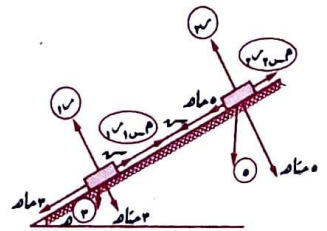
$\therefore \frac{٥}{٢}$ ظا^{٤} هـ − $\frac{٥}{٢}$ = صفر $\therefore$ ظا^{٤} هـ = ١

$\therefore$ ظا^{2} هـ = ١ $\therefore$ ق (هـ) = ٤٥°

$\therefore$ ق = $\frac{١ - ٢}{١ + ٢} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ ظا ل = $\frac{1}{3}$

$\therefore$ ل ≈ ٩ ٢٦ ١٨°

٣٢



الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل

الجسم ذو معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك

الجسمان معًا والخيط مشدود بينهما.

● **بالنسبة للجسم الذى وزنه ٣ ث.كجم :**

$\because$ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ق$_{١}$ ر$_{١}$ + ق$_{١}$ ر$_{١}$ = ٣ ما^{2}

، ر$_{١}$ = ٣ ما^{2}

$\therefore$ ق$_{١}$ = ٣ ما^{2} − $\frac{2}{3}$ × ٣ ما^{2}

= ٣ ما^{2} − ٢ ما^{2} (١)

● **بالنسبة للجسم الذى وزنه ٥ ث.كجم :**

$\because$ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ق$_{٢}$ ر$_{٢}$ = ق$_{٢}$ + ٥ ما^{2} ، ر$_{٢}$ = ٥ ما^{2}

$\therefore$ ق$_{٢}$ = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ ما^{2} − ٥ ما^{2}

= ٤ ما^{2} − ٥ ما^{2} (٢)

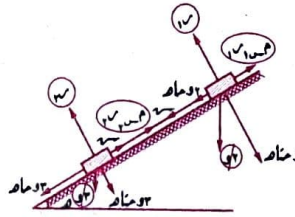
من (١) ، (٢) :

$\therefore$ ٣ ما^{2} − ٢ ما^{2} = ٤ ما^{2} − ٥ ما^{2}

$\therefore$ ٨ ما^{2} = ٦ ما^{2} $\therefore \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2}} = \frac{٦}{٨}$

$\therefore$ ظا^{2} هـ = $\frac{٣}{٤}$

٣٣



الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل

الجسم ذو معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك

الجسمان معًا والخيط مشدود بينهما.

● **بالنسبة للجسم الذى وزنه ٣ و :**

$\because$ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ سـ + ق ر$_{٢}$ = ٣ و ما^{2}

، ر$_{٢}$ = ٣ و ما^{2}

$\therefore$ سـ = ٣ و ما^{2} − $\frac{1}{2}$ × ٣ و ما^{2}

= ٣ و ما^{2} − $\frac{1}{2}$ و ما^{2} (١)

● **بالنسبة للجسم الذى وزنه ٢ و :**

$\because$ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ ق$_{١}$ ر$_{١}$ = سـ + ٢ و ما^{2} ، ر$_{١}$ = ٢ و ما^{2}

$\therefore$ سـ = $\frac{1}{4}$ × ٢ و ما^{2} − ٢ و ما^{2}

= $\frac{1}{2}$ و ما^{2} − ٢ و ما^{2} (٢)

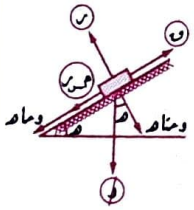
من (١) ، (٢) :

$\therefore$ ٣ و ما^{2} − $\frac{1}{2}$ و ما^{2} = $\frac{1}{2}$ و ما^{2} − ٢ و ما^{2}

$\therefore$ ٥ و ما^{2} = و ما^{2} $\therefore \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2}} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ ظا^{2} هـ = $\frac{1}{5}$

٣٤



ق = ظا^{2} هـ = $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2}}$

$\because$ الجسم على وشك الحركة لأعلى

$\therefore$ ق = ق ر + و ما^{2}

، ر = و ما^{2}

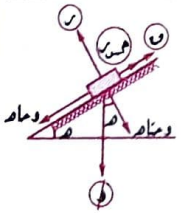
$\therefore$ ق = $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2}}$ × و ما^{2} + و ما^{2}

$\therefore$ ق = و ما^{2} + و ما^{2} = ٢ و ما^{2}

، ر = $\sqrt{\text{ق}^{2} + \text{ق}_{\text{ر}}^{2}}$ = و $\text{ما}^{2}\sqrt{1 + \text{ظا}^{2}\text{هـ}}$

= و $\text{ما}^{2}\sqrt{\text{قا}^{2}\text{هـ}}$ = و

٣٥



إذا كان الجسم على وشك الحركة لأسفل :

$\therefore$ قوة الاحتكاك النهائى لأعلى

ق = طا ل = $\frac{\text{ما ل}}{\text{منا ل}}$

$\therefore$ ق + ق ر = و ما^{2} ، ر = و منا^{2}

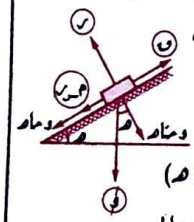
$\therefore$ و = و ما^{2} − $\frac{\text{ما ل}}{\text{منا ل}}$ (و منا^{2})

$\therefore$ و = $\frac{\text{و ما}^{2}\text{منا ل} - \text{و منا}^{2}\text{ما ل}}{\text{منا ل}}$

$\therefore$ و = $\frac{\text{و (ما}^{2}\text{منا ل} - \text{منا}^{2}\text{ما ل)}}{\text{منا ل}}$

$\therefore$ و = $\frac{\text{و ما (هـ} - \text{ل)}}{\text{منا ل}}$ (١)

وإذا كان الجسم على وشك الحركة لأعلى :



$\therefore$ قوة الاحتكاك النهائى لأسفل

$\therefore$ و = و ما^{2} + ق ر

، ر = و منا^{2}

$\therefore$ و = و ما^{2} + $\frac{\text{ما ل}}{\text{منا ل}}$ (و منا^{2})

$\therefore$ و = $\frac{\text{و ما}^{2}\text{منا ل} + \text{و منا}^{2}\text{ما ل}}{\text{منا ل}}$

$\therefore$ و = $\frac{\text{و (ما}^{2}\text{منا ل} + \text{منا}^{2}\text{ما ل)}}{\text{منا ل}}$

$\therefore$ و = $\frac{\text{و ما (هـ} + \text{ل)}}{\text{منا ل}}$ (٢)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن : قيم و التى تجعل الجسم متزنًا تحقق المتباينة :

$\frac{\text{و ما (هـ} - \text{ل)}}{\text{منا ل}} \leq$ و $\leq \frac{\text{و ما (هـ} + \text{ل)}}{\text{منا ل}}$

أى أن :

$\frac{٢\sqrt{٣}\text{ ما}^{2}(٦٠^{\circ} - ٣٠^{\circ})}{\text{منا}^{2}٣٠^{\circ}} \leq$ و $\leq \frac{٢\sqrt{٣}\text{ ما}^{2}(٦٠^{\circ} + ٣٠^{\circ})}{\text{منا}^{2}٣٠^{\circ}}$

$\therefore$ ٣ $\leq$ و $\leq$ ٦ $\therefore$ و $\in$ [٣ ، ٦]

٣٦

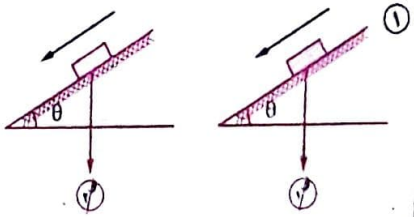
① (ب) ② أولًا : (جـ) ، ثانيًا : (د)

③ (د) ④ أولًا : (أ) ثانيًا : (جـ)

⑤ (أ) ⑥ (أ)

⑦ (د)

إرشادات لحل رقم (٣٦) :

① 

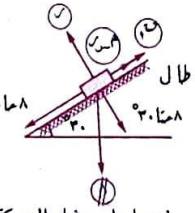
∵ الجسمان على وشك الحركة

∴ $م_1 = ط\theta$ ، $م_2 = ط\theta$

∴ $م_1 = م_2$

② ∵ $ط\theta = ط ٣٠°$

$= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $م_س = \frac{١}{\sqrt{٣}\ ٢} = ط ل$ ، 

∴ $ل < \theta$

∴ اتجاه $ق$ لأعلى

وتوجد حالتان يكون الجسم فيهما على وشك الحركة

* **الحالة الأولى :** إذا كان الجسم على وشك الحركة لأسفل

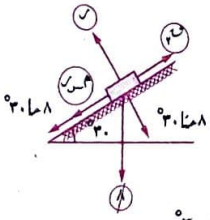
$ر = ٨ ما ٣٠° = ٤\sqrt{٣}$

$ق_1 + م_س ر = ٨ ما ٣٠°$

∴ $ق_1 + \frac{١}{\sqrt{٣}\ ٢} \times ٤\sqrt{٣} = ٤$

∴ $ق_1 = ٢$ ث.كجم

* **الحالة الثانية :** إذا كان الجسم على وشك الحركة لأعلى



∴ $ر = ٨ ما ٣٠°$

$= ٤\sqrt{٣}$

$ق_2 = م_س ر + ٨ ما ٣٠°$

$= \frac{١}{\sqrt{٣}\ ٢} \times ٤\sqrt{٣} + ٤ = ٦$ ث.كجم

∴ $ق$ بالثقل كيلو جرام التى تجعل الجسم على وشك الحركة $\in \{٢ ، ٦\}$ (المطلوب أولاً)

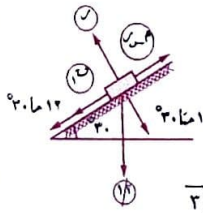
وبالتالى تكون قيم $ق$ بالثقل الكيلو جرام التى تجعل الجسم متزن $\in [٢ ، ٦]$ (المطلوب ثانيًا)

③ ∵ $ط\theta = ط ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $م_س = \sqrt{٣} = ط ل$

∴ $ل > \theta$

∴ توجد حالتان يكون فيهما الجسم على وشك الحركة

* **الحالة الأولى :** إذا كان الجسم على وشك الحركة لأسفل يكون اتجاه $ق$ لأسفل



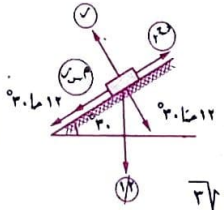
$ر = ١٢ ما ٣٠° = ٦\sqrt{٣}$

$ق_1 + ١٢ ما ٣٠° = م_س ر$

∴ $ق_1 + ٦ = ٦\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

∴ $ق_1 = ١٢$ ∴ $ق = ١٢$ نيوتن لأسفل.

* **الحالة الثانية :** إذا كان الجسم على وشك الحركة لأعلى يكون اتجاه $ق$ لأعلى



$ر = ١٢ ما ٣٠° = ٦\sqrt{٣}$

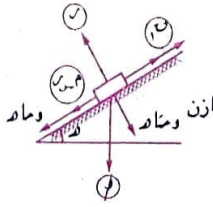
$ق_2 = م_س ر + ١٢ ما ٣٠° = ٦\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + ٦$

$= ٢٤$

∴ $ق = ٢٤$ نيوتن لأعلى

من الحالتين نجد أن الإجابة الصحيحة هى (د)

④ ∵ $ق_1$ أكبر قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى وتحافظ على التوازن



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى

① ∴ $ق_1 = م_س ر + و ما\theta$ (١)

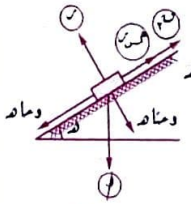
∵ $ق_2$ أقل قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى وتحافظ على التوازن

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ $ق_2 + م_س ر = و ما\theta$

∴ $ق_2 = و ما\theta - م_س ر$ (٢)

من (١) ، (٢) :

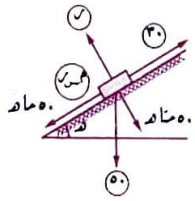


∴ $ق_1 + ق_2 = ٢ و ما\theta$

، $ق_1 - ق_2 = ٢ م_س ر$

$= ٢ ح_س$

⑤ ∵ $ق$ التى تجعل الجسم فى حالة اتزان $\in [٢٠ ، ٣٠]$



∴ $ق = ٣٠$ هى القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى وتكون معادلات الاتزان هى :

$٣٠ = م_س ر + ٥٠ ما\theta$

∴ $م_س ر = ٣٠ - ٥٠ ما\theta$ (١)

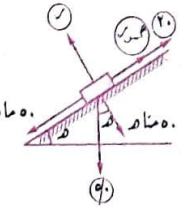
∵ $ر = ٥٠ ما\theta$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $م_س \times ٥٠ ما\theta = ٣٠ - ٥٠ ما\theta$

∴ $م_س = \frac{٣٠ - ٥٠ ما\theta}{٥٠ ما\theta} = \frac{٣ - ٥ ما\theta}{٥ ما\theta}$ (٣)

، $ق = ٢٠$ هى القوة التى تجعل الجسم على وشك الإنزلاق لأسفل وتكون معادلات الاتزان هى :



$٢٠ + م_س ر = ٥٠ ما\theta$

∴ $م_س ر = ٥٠ ما\theta - ٢٠$ ، $ر = ٥٠ ما\theta$

∴ $م_س = \frac{٥٠ ما\theta - ٢٠}{٥٠ ما\theta} = \frac{٥ ما\theta - ٢}{٥ ما\theta}$ (٤)

من (٣) ، (٤) :

∴ $٣ - ٥ ما\theta = ٥ ما\theta - ٢$

∴ $١٠ ما\theta = ٥$ ∴ $ما\theta = \frac{١}{٢}$

∴ $ق(هـ) = ٣٠°$ ، $م_س = \frac{٣ - \frac{١}{٢} \times ٥}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}\ ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

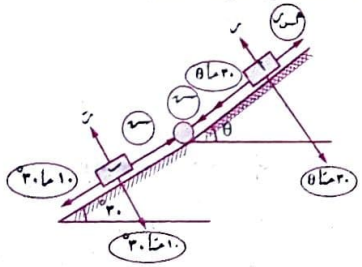
⑥ ∵ $ما\theta = \frac{٣}{٥}$

∴ $ط\theta = \frac{٣}{٤} = ٠.٧٥$ ، $م_س = ٠.٨$

∴ $ط ل = ٠.٨$ ∴ $ل > \theta$

∴ الجسم متزن تحت تأثير وزنه وقوة الاحتكاك

∴ الشد فى الخيط = صفر

⑦ 

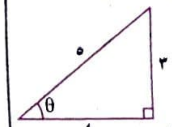
بالنسبة للجسم (ب) على المستوى الأملس

$س_ب = ١٠ ما ٣٠° = ٥$ ث.كجم

بالنسبة للجسم أ على المستوى الخشن

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ $ر = ٣٠ ما\theta$



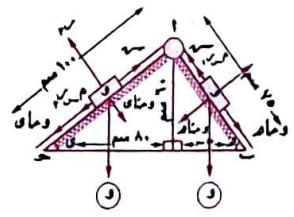
$= ٣٠ \times \frac{٤}{٥} = ٢٤$ ث.كجم

∴ $م_س \times ٢٤ = ٣٠ \times \frac{٣}{٥} + ٥$

∴ $٢٤ م_س = ٢٣$

∴ $م_س = \frac{٢٣}{٢٤}$

٣٧



∵ أحـ > أب ∴ ق (د هـ) > ق (د ى)

∴ و مـاهـ > و مـاى

∴ الجسمين يكونان على وشك الحركة فى إتجاه $\overleftarrow{أب}$

● **بالنسبة للمستوى $\overline{أب}$:**

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ و مـاهـ = سـهـ + ﻫ س١ ، س١ = و مـتاهـ

∴ و مـاهـ = سـهـ + ﻫ س و مـتاهـ

∴ و × $\frac{٤}{٥}$ = سـهـ + $\frac{٣}{٥}$ ﻫ س و

∴ سـهـ = $\frac{٤}{٥}$ و − $\frac{٣}{٥}$ و ﻫ س (١)

● **بالنسبة للمستوى $\overline{أحـ}$:**

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ سـهـ = ﻫ س٢ + و مـاى

، س٢ = و مـتاى ∴ سـهـ = ﻫ س و مـتاى + و مـاى

∴ سـهـ = $\frac{٤}{٥}$ ﻫ س و + $\frac{٣}{٥}$ و (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\frac{٤}{٥}$ و − $\frac{٣}{٥}$ و ﻫ س = $\frac{٤}{٥}$ ﻫ س و + $\frac{٣}{٥}$ و

∴ $\frac{١}{٥}$ و = $\frac{٧}{٥}$ و ﻫ س

∴ ﻫ س = $\frac{\frac{١}{٥}\text{ و}}{\frac{٧}{٥}\text{ و}}$ = $\frac{١}{٧}$

٣٨

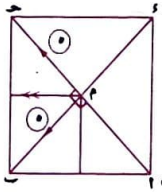
محصلة القوتين = ٢ ق مـتا $\frac{٩٠}{٢}$ = ٢ × ٥ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

= ٥ $\sqrt{٢}$

∴ قوة الاحتكاك = ٥ $\sqrt{٢}$ ث كجم

، عند إمالة المستوى بزاوية ٣٠°

∵ الجسم أصبح على وشك الحركة



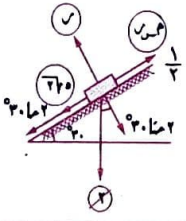
∴ ﻫ س = ٥ $\sqrt{٢}$ + ٢ ﻫ مـتا ٣٠°

، ر = ٢ مـتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

∴ ﻫ س × $\sqrt{٣}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ + ٢ × $\frac{١}{٢}$

∴ $\sqrt{٣}$ ﻫ س = ٥ $\sqrt{٢}$ + ١

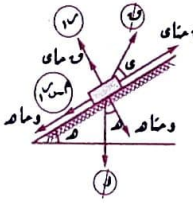
∴ ﻫ س = $\frac{٥\sqrt{٢}+\sqrt{٣}}{٣}$



٣٩

بفرض أن : $\overleftarrow{ق}$ تصنع زاوية قياسها ى مع المستوى

، ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى



∴ ق مـتاى = ﻫ س١ + و مـاهـ

، س١ + ق مـاى = و مـتاهـ

∴ س١ = و مـتاهـ − ق مـاى

∴ ق مـتاى = ﻫ س (و مـتاهـ − ق مـاى) + و مـاهـ

∴ ق مـتاى = ﻫ س و مـتاهـ − ﻫ س ق مـاى + و مـاهـ

، ∵ ﻫ س = طا ل = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

∴ ق مـتاى

= و × $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ مـتاهـ − ق × $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ مـاى + و مـاهـ

وبالضرب فى (جتا ل) :

∴ ق مـتاى

= و جا ل مـتاهـ − ق جا ل مـاى + و جتا ل مـاهـ

∴ ق (مـتاى + جا ل مـاى)

= و (جا ل مـتاهـ + جتا ل مـاهـ)

∴ ق مـتا (ل − ى) = و جا (ل + هـ)

∴ ق = $\frac{\text{و جا (ل + هـ)}}{\text{مـتا (ل − ى)}}$

، ∵ ق تكون أقل ما يمكن عندما :

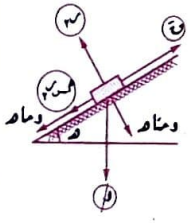
مـتا (ل − ى) أكبر ما يمكن

أى عندما : مـتا (ل − ى) = ١

∴ ق = و جا (هـ + ل) (١)

● **القوة موازية للمستوى :**

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى



∴ ق = ﻫ س٢ + و مـاهـ

، س٢ = و مـتاهـ

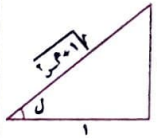
، ﻫ س = طا = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

∴ ق = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ × و مـتاهـ + و مـاهـ

∴ ق جتا ل = و مـتاهـ جا ل + و مـاهـ جتا ل

∴ ق جتا ل = و [جا هـ جتا ل + جتا هـ جا ل]

∴ ق = $\frac{\text{و جا (هـ + ل)}}{\text{جتا ل}}$ (٢)



∴ $\frac{\text{ق}}{\text{و}}$ = $\frac{\frac{\text{و جا (هـ + ل)}}{\text{جتا ل}}}{\frac{\text{جا (هـ + ل)}}{١}}$ ﻫ س

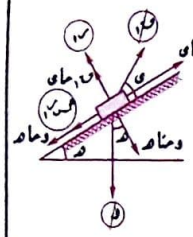
= $\frac{١}{\text{جتا ل}}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{و}}$ = ١ ÷ $\frac{١}{\sqrt{١ - \text{م}_{س}^{٢}}}$ = $\sqrt{١ - \text{م}_{س}^{٢}}$

∴ ق = و $\sqrt{١ - \text{م}_{س}^{٢}}$

٤٠

● **نفرض أن القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى هى ق١ وتصنع مع المستوى زاوية قياسها ى لأعلى :**



∴ ق١ مـتاى = ﻫ س١ + و مـاهـ

، س١ = طا ، ر١ + ق١ مـاى = و مـتاهـ

∴ ر١ = و مـتاهـ − ق١ مـاى

∴ ق١ مـتاى = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ [و مـتاهـ − ق١ مـاى] + و مـاهـ

، بالضرب فى جتا ل :

∴ ق١ مـتاى جتا ل = و مـتاهـ جا ل − ق١ جا ل مـاى

+ و مـاهـ جتا ل

∴ ق١ (مـتاى جتا ل + مـاى جا ل)

= و (مـاهـ جتا ل + مـتاهـ جا ل)

∴ ق١ مـتا (ى − ل) = و جا (هـ + ل)

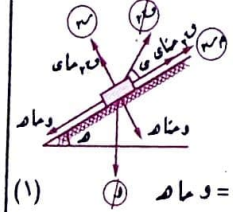
∴ ق١ = $\frac{\text{و جا (هـ + ل)}}{\text{مـتا (ى − ل)}}$

∴ ق١ تكون أصغر ما يمكن عندما مـتا (ى − ل) = ١

أى أن : ى − ل = ٠ ∴ ق (د ى) = ق (د ل)

∴ ق١ = و جا (هـ + ل)

● **نفرض أن القوة التى تمنع الجسم من الانزلاق ق٢ :**



∴ ق٢ مـتاى + ﻫ س٢ = و مـاهـ (١)

، ر٢ + ق٢ مـاى = و مـتاهـ

∴ ر٢ = و مـتاهـ − ق٢ مـاى

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ق٢ مـتاى + $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ [و مـتاهـ − ق٢ مـاى] = و مـاهـ

، وبالضرب فى مـتا ل :

∴ ق م ﻫ ى ﻫ ال + و ﻫ ال ﻫ ال ﻫ − ق م ﻫ ى ﻫ ال

= و ﻫ ال ﻫ ال

∴ ق م [ﻫ ى ﻫ ال − ﻫ ى ﻫ ال]

= و [ﻫ ال ﻫ ال − ﻫ ال ﻫ ال]

∴ ق م ﻫ ال (ى + ل) = و ﻫ ا (ﻫ − ل)

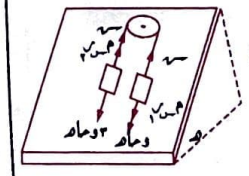
∴ ق م = $\frac{\text{و ﻫ ا (ﻫ − ل)}}{\text{ﻫ ا (ى + ل)}}$ أقل قوة عندما

ﻫ ا (ى + ل) أكبر ما يمكن

∴ ﻫ ا (ى + ل) = ١ ∴ ى + ل = صفر

∴ ى = − ل وتكون ق م = و ﻫ ا (ﻫ − ل)

٤١



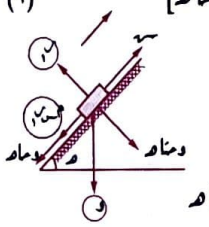
● **معادلتا الاتزان بالنسبة للجسم (و) :**

ﻫ ١ = و ﻫ ال

، ﻫ ﻫ = ﻫ ﻫ ١ + و ﻫ ال

∴ ﻫ ﻫ = $\frac{١}{٢}$ و ﻫ ال + و ﻫ ال

= و [$\frac{١}{٢}$ ﻫ ال + ﻫ ال] (١)



● **معادلتا الاتزان بالنسبة للجسم (٣ و) :**

ﻫ ٢ = ٣ و ﻫ ال

، ﻫ ﻫ + ﻫ ﻫ ٢ = ٣ و ﻫ ال

∴ ﻫ ﻫ = ٣ و ﻫ ال − $\frac{١}{٢}$ (٣ و ﻫ ال)

= و [٣ ﻫ ال − $\frac{٣}{٢}$ ﻫ ال] (٢)

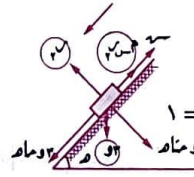
من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{١}{٢}$ ﻫ ال + ﻫ ال

= ٣ ﻫ ال − $\frac{٣}{٢}$ ﻫ ال

∴ ﻫ ال = ﻫ ال

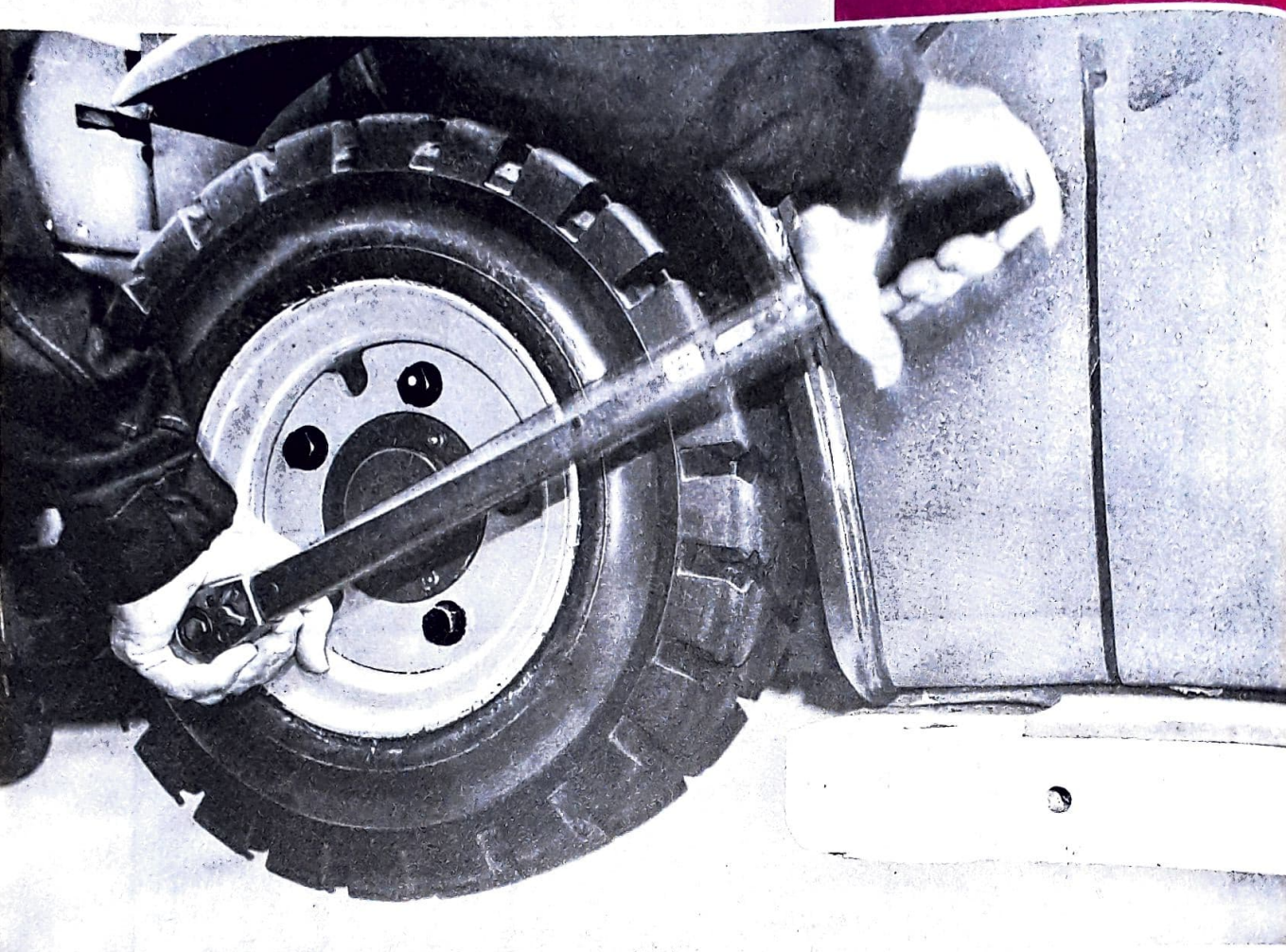
∴ $\frac{\text{ﻫ ال}}{\text{ﻫ ال}}$ = ١ ∴ ظا ﻫ = ١

∴ ق (∠ ﻫ) = ٤٥°



إجابات تمارين

الوحدة الثانية



العزوم

إجابات تمارين 3

أولاً تمارين على إيجاد العزم باستخدام الضرب الاتجاهي

١

① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (أ)
⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (د) ⑩ (جـ)
⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (جـ) ⑮ (ب)
⑯ (ب) ⑰ (ب)

٢

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{و أ} = (-١ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_و = (-١ \times ٤ - ٣ \times ٣) \overrightarrow{ع} = (-٤ - ٩) \overrightarrow{ع}$

$= -١٣ \overrightarrow{ع}$

، $ل = \frac{\|\overrightarrow{ع}_و\|}{ن} = \frac{١٣}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}} = \frac{١٣}{٥} = ٢,٦$ وحدة طول.

٣

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{ب أ} = (٠ ، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = (٠ \times -٢ - ٢ \times ١) \overrightarrow{ع} = -٢ \overrightarrow{ع}$

، $ل = \frac{\|\overrightarrow{ع}_ل\|}{ن} = \frac{٢}{\sqrt{(١)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول.

٤

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٥ ، ٢) - (٧ ، -٤) = (-٢ ، ٦)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = (-٢ \times -٢ - ٦ \times ل) \overrightarrow{ع} = ٢٠ \overrightarrow{ع}$

$\therefore ٤ - ٦ ل = ٢٠ \quad \therefore -٦ ل = ١٦ \quad \therefore ل = \frac{-٨}{٣}$

٥

● **بالنسبة للنقطة ب :**

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٠ ، ٢) - (٣ ، -٢) = (-٣ ، ٤)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = (-٣ \times -٤ - ٤ \times ٣) \overrightarrow{ع} = (١٢ - ١٢) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بنقطة ب

● **بالنسبة للنقطة حـ :**

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{حـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (٠ ، ٢) - (٢ ، ٣) = (-٢ ، -١)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_حـ = (-٢ \times -٤ + ١ \times ٣) \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_حـ = (٨ + ٣) \overrightarrow{ع} = ١١ \overrightarrow{ع}$

● **بالنسبة للنقطة ء :**

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{ء أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ء} = (٠ ، ٢) - (-٢ ، ١) = (٢ ، ١)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ء = (٢ \times -٤ - ١ \times ٣) \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ء = (-٨ - ٣) \overrightarrow{ع} = -١١ \overrightarrow{ع}$

، $\because \overrightarrow{ع}_حـ = -\overrightarrow{ع}_ء$ $\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{حـ ء}$

● **بالنسبة للنقطة هـ :**

$\overrightarrow{س} = \overrightarrow{هـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{هـ} = (٠ ، ٢) - (٥ ، -١) = (-٥ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_هـ = (-٥ \times -٤ - ٢ \times ٣) \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_هـ = (٢٠ - ٩) \overrightarrow{ع} = ١١ \overrightarrow{ع}$

$\because \overrightarrow{ع}_حـ = \overrightarrow{ع}_هـ$ $\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{حـ هـ}$

٦

$\overrightarrow{ع} = ٦ \overrightarrow{س} - ٨ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{أو} = \overrightarrow{و} - \overrightarrow{أ}$

$= (٠ ، ٠) - (-٣ ، ٤) = (٣ ، -٤)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_١ = (٣ \times -٨ + ٤ \times ٦) \overrightarrow{ع} = (-٢٤ + ٢٤) \overrightarrow{ع}$

$= \overrightarrow{صفر}$

$\therefore$ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة أ

، $\overrightarrow{ر}_٢ = \overrightarrow{ب و} = \overrightarrow{و} - \overrightarrow{ب} = (٠ ، ٠) - (٢ ، -٥)$

$= (-٢ ، ٥)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = (-٢ \times -٨ - ٥ \times ٦) \overrightarrow{ع} = (١٦ - ٣٠) \overrightarrow{ع}$

$= -١٤ \overrightarrow{ع}$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{\|\overrightarrow{ع}_ل\|}{\|\overrightarrow{ع}\|} = \frac{١٤}{١٠} = ١,٤$ وحدة طول

٧

$\overrightarrow{ع}_١$ (عزم $\overrightarrow{ق}_١$ حول و) $= (١ \times -٣ - ١ \times ٢) \overrightarrow{ع}$

$= -٥ \overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ع}_٢$ (عزم $\overrightarrow{ق}_٢$ حول و) $= (-٢ \times ١ - ٢ \times ٥) \overrightarrow{ع}$

$= -١٢ \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_٣$ (عزم $\overrightarrow{ق}_٣$ حول و) $= (٣ \times ٧ + ١ \times ٤) \overrightarrow{ع}$

$= ٢٥ \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_و$ (عزم المحصلة حول و)

$= -٥ \overrightarrow{ع} - ١٢ \overrightarrow{ع} + ٢٥ \overrightarrow{ع} = ٨ \overrightarrow{ع}$

٨

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ق}_٢ = ٤ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

بفرض أن هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

$\therefore$ هـ $= \left(\frac{-١ + ١}{٢} ، \frac{٥ + ٢}{٢}\right) = (٠ ، ٣,٥)$

، $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{هـ أ} = \left(-٢ ، -\frac{١}{٢}\right)$

، $\overrightarrow{ع}_هـ = \left(-٢ ، -\frac{١}{٢}\right) \times (٤ ، ١) = (-٢ + ٢) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب حـ}$

٩

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ق}_٢ + \overrightarrow{ق}_٣ = ٤ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$

● **بالنسبة للنقطة (٢ ، ١) :**

$\overrightarrow{ر}_١ = (١ ، ١) - (٢ ، ١) = (-١ ، ٠)$

، $\overrightarrow{ع}_١ = (-١ \times ٣ - ٠ \times ٤) \overrightarrow{ع} = -٣ \overrightarrow{ع}$

● **بالنسبة للنقطة (٦ ، ٤) :**

$\overrightarrow{ر}_٢ = (١ ، ١) - (٦ ، ٤) = (-٥ ، -٣)$

، $\overrightarrow{ع}_٢ = (-٥ \times ٣ + ٣ \times ٤) \overrightarrow{ع} = -٣ \overrightarrow{ع}$

، $\because \overrightarrow{ع}_١ = \overrightarrow{ع}_٢$

$\therefore$ خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين المعلومتين.

١٠

● **بالنسبة للنقطة ب :**

$\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-٥ ، ٣) - (١ ، ٢) = (-٦ ، ١)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = (-٦ \times ل - ١ \times ١٢) \overrightarrow{ع}$

$= (-٦ ل - ١٢) \overrightarrow{ع}$ (١)

● **بالنسبة للنقطة حـ :**

$\overrightarrow{ر}_٢ = \overrightarrow{حـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (-٥ ، ٣) - (١ ، ٩)$

$= (-٦ ، -٦)$

$\therefore \overrightarrow{ع}_حـ = (-٦ \times ل + ٦ \times ١٢) \overrightarrow{ع}$

$= (-٦ ل + ٧٢) \overrightarrow{ع}$ (٢)

$\because$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{ب حـ}$

$\therefore \overrightarrow{ع}_ل = -\overrightarrow{ع}_حـ$ ، من (١) ، (٢)

$\therefore -٦ ل - ١٢ = ٦ ل - ٧٢$

$\therefore ١٢ ل = ٦٠ \quad \therefore ل = ٥$

، $ل = \frac{\|\overrightarrow{ع}_ل\|}{ن} = \frac{٤٢}{\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}} = \frac{٤٢}{١٣}$ وحدة طول.

١١

$\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{و أ}_١ = (١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = \overrightarrow{و أ}_٢ = (-١ ، -٢)$

، $\because \overrightarrow{ع}_و = \overrightarrow{ر}_١ \times \overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ر}_٢ \times \overrightarrow{ق}_٢$

$\therefore (١ \times ٢ - ١ \times م) \overrightarrow{ع} + (-١ \times -١ + ٢ \times ل) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore (٢ - م) \overrightarrow{ع} + (١ + ٢ ل) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore ٢ - م + ١ + ٢ ل = ٠$

$\therefore ٢ ل - م = -٣$ (١)

، $\overrightarrow{ر}_٣ = \overrightarrow{ب أ}_١ = \overrightarrow{أ}_١ - \overrightarrow{ب} = (١ ، ١) - (٢ ، ٣)$

$= (-١ ، -٢)$

، $\overrightarrow{ر}_٤ = \overrightarrow{ب أ}_٢ = \overrightarrow{أ}_٢ - \overrightarrow{ب} = (-١ ، -٢) - (٢ ، ٣)$

$= (-٣ ، -٥)$

، $\because \overrightarrow{ع}_ل = \overrightarrow{ر}_٣ \times \overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ر}_٤ \times \overrightarrow{ق}_٢$

$\therefore (-١ \times ٢ + ٢ \times م) \overrightarrow{ع} + (-٣ \times -١ + ٥ \times ل) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore -٢ + ٢ م + ٣ + ٥ ل = ٠$

$\therefore ٢ م + ٥ ل = -١$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore ل = -\frac{٧}{٩}$ ، $م = \frac{١٣}{٩}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بنقطة ب

$\therefore$ ع$_{ب}$ = $\overrightarrow{ع}_{ح}$ (عزم $\overrightarrow{ق}_{١}$ حول و) = (١ × −٣ − ١ × ٢) $\overrightarrow{ع}$

= −٥ $\overrightarrow{ع}$

● **بالنسبة للنقطة ب :**

$\overrightarrow{ر}_{١}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−٥ ، ٣) − (١ ، ٢) = (−٦ ، ١)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ ل = $\frac{-٧}{٩}$ ، م = $\frac{١٢}{٩}$

١٢

بفرض أن $\overrightarrow{ق}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ر}_{١}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−٣ ، ٢) − (٣ ، ١) = (−٦ ، ١)

$\overrightarrow{ع}_{ح}$ = (−٦ ، ١) × (ل ، م)

$\therefore$ −٦ م − ل = ٢٨ (١)

$\overrightarrow{ر}_{٢}$ = $\overrightarrow{حـ أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{حـ}$ = (−٣ ، ٢) − (−١ ، ٤)

= (−٢ ، −٢)

$\overrightarrow{ع}_{حـ}$ = (−٢ ، −٢) × (ل ، م)

$\therefore$ −٢ م + ٢ ل = ٢٨ $\therefore$ − م + ل = ١٤ (٢)

من (١) ، (٢) : م = −٦ ، ل = ٨

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = ٨ $\overrightarrow{س}$ − ٦ $\overrightarrow{ص}$

١٣

● **بالنسبة للنقطة (−٥ ، ٠) :**

$\overrightarrow{ر}_{١}$ = (١ ، −٣) − (−٥ ، ٠) = (٦ ، −٣)

$\overrightarrow{ع}_{(-٥ ، ٠)}$ = (٦ م + ٣ ل) $\overrightarrow{ع}$ = −٢١ $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ ٦ م + ٣ ل = −٢١ $\therefore$ ٢ م + ل = −٧ (١)

● **بالنسبة للنقطة (٢ ، −٧) :**

$\overrightarrow{ر}_{٢}$ = (١ ، −٣) − (٢ ، −٧) = (−١ ، ٤)

$\overrightarrow{ع}_{(٢ ، -٧)}$ = (−١ × م − ٤ × ل) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ − م − ٤ ل = ٠ $\therefore$ م = −٤ ل

بالتعويض فى (١) : $\therefore$ ٢ × −٤ ل + ل = −٧

$\therefore$ −٧ ل = −٧ $\therefore$ ل = ١

$\therefore$ م = −٤ $\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$

$\|\overrightarrow{ق}\|$ = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$ وحدة قوة.

ميل $\overrightarrow{ق}$ = $\frac{-٤}{١}$ = −٤

● **معادلة خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$:**

$\because$ الميل = −٤ ، تمر بالنقطة (١ ، −٣)

$\therefore$ $\frac{ص + ٣}{س - ١}$ = −٤ $\therefore$ ص + ٣ = −٤ س + ٤

$\therefore$ ٤ س + ص − ١ = صفر

١٤

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{ب}$ = − $\overrightarrow{ع}_{حـ}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{ب حـ}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بالنقطة ء $\left(\frac{-١ - ١}{٢} ، \frac{-٤ + ٠}{٢}\right)$

= (٠ ، −٢)

وبفرض $\overrightarrow{ق}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$

$\therefore$ $\overrightarrow{ر}_{١}$ = $\overrightarrow{أ ء}$ = $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٠ ، −٢) − (٣ ، ٢)

= (−٣ ، −٤)

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{١}$ = ٦٠ $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ ٦٠ $\overrightarrow{ع}$ = (−٣ × م + ٤ × ل) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ ٤ ل − ٣ م = ٦٠ (١)

$\overrightarrow{ر}_{٢}$ = $\overrightarrow{ب ء}$ = $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، −٢) − (−١ ، −٤)

= (١ ، ٢)

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{ب}$ = ٦٠ $\overrightarrow{ع}$

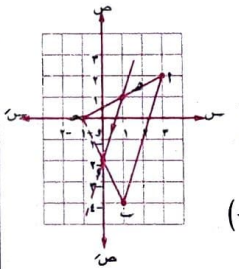
$\therefore$ ٦٠ $\overrightarrow{ع}$ = (−١ × م − ٢ × ل) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ − م − ٢ ل = ٦٠ (٢)

وبحل (١) ، (٢) : $\therefore$ م = −٣٦ ، ل = −١٢

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = −١٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣٦ $\overrightarrow{ص}$

ق = $\sqrt{(-١٢)^{٢} + (-٣٦)^{٢}}$ = ١٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة قوة.



حل آخر :

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{ب}$ = − $\overrightarrow{ع}_{حـ}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{ب حـ}$

أى يمر بالنقطة ء

= $\left(\frac{-١ - ١}{٢} ، \frac{-٤ + ٠}{٢}\right)$

= (٠ ، −٢)

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{١}$ = − $\overrightarrow{ع}_{حـ}$

$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{أ حـ}$

أى يمر بالنقطة هـ = $\left(\frac{-٣ - ١}{٢} ، \frac{٢ + ٠}{٢}\right)$ = (١ ، ١)

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ تعمل فى اتجاه $\overrightarrow{هـ ء}$

«لاحظ العزم حول ب موجب»

$\because$ $\overrightarrow{هـ ء}$ = $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{هـ}$ = (−١ ، −٣)

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = $\frac{(-١ ، -٣)}{\sqrt{١٠}}$ × $\|\overrightarrow{ق}\|$

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{١}$ = $\overrightarrow{أهـ}$ × $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ = $\overrightarrow{هـ}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، −١)

$\therefore$ ٦٠ $\overrightarrow{ع}$ = (−٢ ، −١) × $\frac{(-١ ، -٣)}{\sqrt{١٠}}$ × $\frac{\|\overrightarrow{ق}\|}{\sqrt{١٠}}$

$\therefore$ ٦٠ $\overrightarrow{ع}$ = (٦ − ١) $\overrightarrow{ع}$ × $\frac{\|\overrightarrow{ق}\|}{\sqrt{١٠}}$

$\therefore$ $\|\overrightarrow{ق}\|$ = $\frac{\sqrt{١٠} \times ٦}{٥}$ = ١٢ $\sqrt{١٠}$

$\overrightarrow{ق}$ = ١٢ $\sqrt{١٠}$ × $\frac{(-١ ، -٣)}{\sqrt{١٠}}$ = (−١٢ ، −٣٦)

= −١٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣٦ $\overrightarrow{ص}$

١٥

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٤) − (−٣ ، ١) = (٤ ، ٣)

$\therefore$ $\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥

$\therefore$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ = $\frac{(٤ ، ٣)}{٥}$ = $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = ١٥ $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$ = (١٢ ، ٩)

$\overrightarrow{ر}_{١}$ = $\overrightarrow{وأ}$ = $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{و}$ = (−٣ ، ١) − (٠ ، ٠) = (−٣ ، ١)

$\therefore$ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = (−٣ × ٩ − ١ × ١٢) $\overrightarrow{ع}$

= (−٢٧ − ١٢) $\overrightarrow{ع}$ = −٣٩ $\overrightarrow{ع}$

١٦

نفرض أن $\overrightarrow{ق}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ = (ل ، م) وخط عملها يقطع محور السينات فى النقطة أ (س ، ٠)

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = ٢٧

$\therefore$ $\overrightarrow{وأ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = (س ، ٠) × (ل ، م) = (س م) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ س م = ٢٧

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = ١٨

$\therefore$ $\overrightarrow{وأ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = (س − ١ ، ٠) × (ل ، م)

= (س م − م) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ س م − م = ١٨

$\therefore$ ٢٧ − م = ١٨ $\therefore$ م = ٩ ، س = ٣

$\because$ $\overrightarrow{ع}_{هـ}$ = $\frac{١}{٢}$ ٤٠

$\therefore$ $\overrightarrow{هـأ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = (س ، −٢) × (ل ، ٩)

= (٩ س + ٢ ل) $\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ ٩ س + ٢ ل = $\frac{١}{٢}$ ٤٠

$\therefore$ ٢٧ + ٢ ل = $\frac{١}{٢}$ ٤٠ $\therefore$ ل = $\frac{٢٧}{٤}$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق}$ = $\left(\frac{٢٧}{٤} ، ٩\right)$ = $\frac{٢٧}{٤}$ $\overrightarrow{س}$ + ٩ $\overrightarrow{ص}$

ثانيا تمارين على إيجاد عزم قوة باستخدام طول العمود

١

① $\overrightarrow{ع}_{و}$ = −٤٠ × ٣٠ = −١٢٠٠ نيوتن.سم

② $\overrightarrow{ع}_{و}$ = ٤٠ × ٣٠ جا ٤٥° = ٦٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.سم

③ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = −٤٠ × (٢٠ + ١٠ جتا ٢٠°)

= −١١٧٥,٨٨ نيوتن.سم

④ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = −٤٠ × (٨ + ٦ جتا ٦٠°)

= −٤٤٠ نيوتن.م

⑤ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = ٤٠ × ٣ جا ٤٥° = ٦٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.م

⑥ $\overrightarrow{ع}_{و}$ = ٤٠ × (٨ − ٢) = ٢٤٠ نيوتن.م

٢

① (د) ② (جـ) ③ (ب) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

٣

① $\overrightarrow{ع}_{و}$ = −١٥ × ٥ جا ٦٠°

= − $\frac{٧٥ \sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن.م

② $ج_{و} = -١٠٠ \times \frac{٤}{٥} \times ٢ - ١٠٠ \times \frac{٣}{٥} \times ٥$

$= -٤٦٠$ نيوتن.م

③ $ج_{و} = -٢٠٠$ جتا $٣٠^\circ \times ٢ - ٢٠٠$ جا $٣٠^\circ \times \frac{١}{٢}$

$\approx -٢٩٦,٤١$ نيوتن.م

④ $ج_{و} = ٣ \times (١٢٠ + ٩٠\sqrt{٢}$ جتا $٤٥^\circ - ٣٠)$

$= ٥٤٠$ نيوتن.سم

⑤ $ج_{و} = ١٠٠ \times ٤$ جا $٤٥^\circ = ٢٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن.متر

⑥ $ج_{و} = -١٢$ جتا $٣٠^\circ \times ٤\sqrt{٣} - ١٢$ جا $٣٠^\circ \times ٣$

$= -٩٠$ نيوتن.م

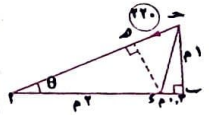
٤

$\because ج_{ق} = ج_{و}$

$\therefore ق \times ١٠٠$ جا $٣٠^\circ = ٥٠ \times ١٠٠$ جتا ٣٠°

$\therefore ق = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

٥



$أ ح = \sqrt{٢١^{٢} + ٣٢,٣^{٢}}$

$= \frac{٦٢٩}{١٠}$ متر

$\because$ جا $\theta = \frac{١}{\frac{٦٢٩}{١٠}} = \frac{ء د}{٢}$ $\therefore ء د = \frac{٢٠}{٦٢٩}$

$\therefore ج_{و} = ٢٢٠ \times \frac{٢٠}{٦٢٩} \approx ١٧٥,٤$ نيوتن.متر

٦

$\because ج_{م} = -١٠٠$ جتا $٣٠^\circ \times ٢٢,٥ - ١٠٠$ جا $٣٠^\circ \times ١٠$

$= -٢٤٤٨,٥٦$ نيوتن. سم

٧

$\because ج_{م} = ٨٠$ نيوتن.متر

$\therefore ق \times \frac{٣٥}{١٠٠}$ جتا $٤٠^\circ = ٨٠$

$\therefore ق \approx ٢٩٨,٣٨$ نيوتن

$\therefore ج_{ل} = ٢٩٨,٣٨ \times (\frac{٣٥}{١٠٠}$ جتا $٤٠^\circ + \frac{٢٧}{١٠٠}$ جتا $٣٠^\circ)$

$\approx ١٤٩,٧٧$ نيوتن.م

٨

أقل قوة عندما $\theta = ٩٠^\circ$

$\therefore ج_{و} = ٤٠٠$ $\therefore ق \times ٢٠ = ٤٠٠$

$\therefore ق = ٢٠$ نيوتن وهى أقل قوة تحقق دوران المسمار.

٩

$ج_{و} = ٢٠٠$ جا $٣٠^\circ \times ٤٠ - ٢٠٠$ جتا $٣٠^\circ \times ٦٠$

$\approx -٦٣٩٢,٣$ نيوتن.سم

١٠

$\because ج_{م} = \pm ٢٠٠$ نيوتن.سم

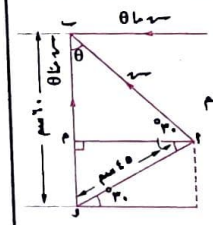
$\therefore -ق$ جتا $٣٠^\circ \times ٤٠ - ق$ جا $٣٠^\circ \times ٥ = -٢٠٠$

$\therefore ق (٤٠$ جتا $٣٠^\circ + ٥$ جا $٣٠^\circ) = ٢٠٠$

$\therefore ق \approx ٥,٣٨$ نيوتن

١١

من هندسة الشكل :



$م و = \frac{١}{٢} \times ٤٥ = ٢٢,٥$ سم

$، أ م = ٢٢,٥\sqrt{٣}$ سم

$، ب م = ٦٠ - ٢٢,٥$

$= ٣٧,٥$ سم

$، أ ب = ١٥\sqrt{١٣}$

$\therefore ج_{و} =$ سهـ $\theta \times ٦٠ \times ١٥٠ \times \frac{٢٢,٥\sqrt{٣}}{١٥\sqrt{١٣}}$

$\approx ٦٤٨٥,١٩$ نيوتن.سم

ثالثا مسائل متنوعة

١

① (ب) ② (أ) ③ (أ) ④ (أ)

⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (ب)

⑬ (أ)

٢

① $ج_{و} = -٦٠٠ \times ١ \times ٥٠٠ \times (١ + ٢ + ٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}})$

$-٣٠٠ \times ٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = ١٣٠٠$ نيوتن.متر

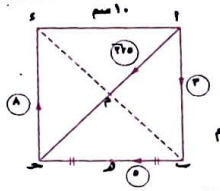
② $ج_{و} = -٥٠٠ \times \frac{٤}{٥} \times ٢٥ + ٥٠٠ \times \frac{٣}{٥}$

$\times (٣٠ + ١٢,٥) - ٦٠٠$ جتا ٦٠°

$\times (٣٠ + ١٢,٥) - ٦٠٠$ جتا ٦٠°

$\times ٢٥ \approx -٢٦٨٣٣,٦$ نيوتن.سم

٣



① $ج_{م} = -٥ \times ١٠$

$- ٨ \times ١٠$

$= -١٣٠$ نيوتن.سم

② $ج_{ل} = -٨ \times ١٠$

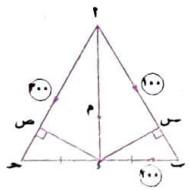
$+ ٥ \times ٢\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٣} = -٣٠$ نيوتن.سم

③ $ج_{م} = (-٣ - ٥ - ٨) \times ٥ = -٨٠$ نيوتن.سم

④ $ج_{و} = -٣ \times ٥ - ٨ \times ٥ + ٥ \times ٢\sqrt{٢} \times \frac{٢\sqrt{٥}}{٢}$

$= -٣٠$ نيوتن.سم

٤



$أ ء = ٢٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ١٠\sqrt{٣}$

$، ء م = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$

= بُعد م عن أى ضلع

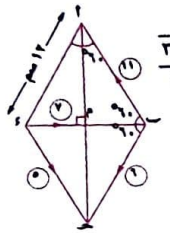
من أضلاع Δ أ ب حـ

$\therefore ج_{م} = (-١٠٠ - ٢٠٠ + ٣٠٠) \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} =$ صفر

$، ج_{ء} = -١٠٠ \times ١٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} + ٣٠٠ \times ١٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$= -٥٠٠\sqrt{٣} + ١٥٠٠\sqrt{٣} = ١٠٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

٥



$ج_{م} = ٧ \times ٦\sqrt{٣} - ٦ \times ١٢ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$+ ٥ \times ١٢ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ج_{م} = ٤٢\sqrt{٣} - ٣٦\sqrt{٣}$

$+ ٣٠\sqrt{٣}$

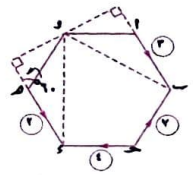
$= ٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

، بُعد م عن أى ضلع من أضلاع المعين $= \frac{٦ \times ٦\sqrt{٣}}{١٢}$

$= ٣\sqrt{٣}$ سم

$\therefore ج_{م} = ٣\sqrt{٣}(١١ - ٦ + ٥) = ٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

٦



$ج_{و} = -٣ \times ١٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$+ ٧ \times ١٠\sqrt{٣}$

$- ٤ \times ١٠\sqrt{٣}$

$+ ٢ \times ١٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$= -١٥\sqrt{٣} + ٧٠\sqrt{٣} - ٤٠\sqrt{٣} + ١٠\sqrt{٣}$

$= ٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

٧

$ج_{حـ} = ١٠٠ \times ٢٠ - ٨٠\sqrt{٢}$ جا $٤٥^\circ \times ٢٥ = ٠$

$\therefore$ المحصلة تمر بالنقطة حـ

٨

$ج_{م} = -١٥٠ \times ٦٠ - ٢٥٠ \times \frac{٤}{٥} \times ١١٠$

$- ٢٠٠$ جتا $٣٠^\circ \times ١٥٠$

$+ ٢٠٠$ جا $٣٠^\circ \times ٢ \approx -٥٦٧٨٠,٨$ نيوتن.سم

$، ج_{ل} = ٢٠٠$ جا $٣٠^\circ \times ٢ + ٢٥٠ \times ٢ \times \frac{٤}{٥} \times ٤٠ + ١٥٠$

$\times ٩٠ = ٢١٧٠٠$ نيوتن.سم

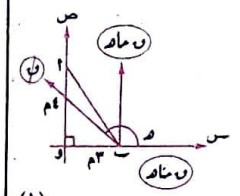
٩

$ج_{ح} = -٨٠٠ \times ٢ \times \frac{٤}{٥} \times ٢,٥$

$+ ٦٠٠ \times$ ما $٣٠^\circ \times ٢ - ٦٠٠$ ما $٣٠^\circ \times ٧$

$= -٣٢٦٠,٨$ نيوتن.م

١٠



$\because ج_{ل} =$ صفر

$\therefore$ ن تمر بالنقطة ب

$\because ج_{و} = ٨٤$

$\therefore$ ن ما هـ $\times ٣ = ٨٤$ (١)

$، ج_{م} = -١٠٠$

$\therefore$ ن ما هـ $\times ٣ +$ ن ما هـ $\times ٤ = -١٠٠$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore ٨٤ +$ ن ما هـ $\times ٤ = -١٠٠$

$\therefore ٤$ ن ما هـ $= -١٨٤$ $\therefore$ ن ما هـ $= -٤٦$

$\therefore \frac{\text{ن ما هـ}}{\text{ن ما هـ}} = \frac{٨٤}{-٤٦}$ $\therefore$ ن $(د هـ) = ١٤٨^\circ ٤٠'$

$\therefore$ ن $= ٥٤$ نيوتن

حل آخر :

نفرض أن $\overleftarrow{ق} = ل \overleftarrow{س} + ك \overleftarrow{ص}$

$\therefore \overleftarrow{و ب} \times \overleftarrow{ق} = ٨٤ \overleftarrow{ع}$

$\therefore (٢ ، ٠) \times (ل ، ك) = ٨٤ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ٢ ك = ٨٤$

$\therefore ك = ٢٨$

$، \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{ق} = -١٠٠ \overleftarrow{ع}$

$\therefore (٣ ، -٤) \times (ل ، ك) = -١٠٠ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ٣ ك + ٤ ل = -١٠٠$ $\therefore ٨٤ + ٤ ل = -١٠٠$

$\therefore ل = -٤٦$

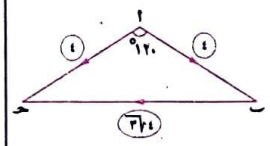
$\therefore \overleftarrow{ق} = -٤٦ \overleftarrow{س} + ٢٨ \overleftarrow{ص}$

$\therefore \| \overleftarrow{ق} \| = \sqrt{(-٤٦)^٢ + (٢٨)^٢} = ١٠ \sqrt{٢٩}$

$= ٥٤$ نيوتن

$، هـ = ١٨٠^\circ - ظ^{-١} (\frac{٢٨}{٤٦}) = ١٤٨^\circ ٤٠'$

١١



نفرض أن

$أ ب = أ ح = ل$

$\therefore ج_{م} = -٤ \sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} ل = -٢ \sqrt{٣}$ ل ث.كجم.سم

$، ج_{ب} = ٤ \times ل$ ما $٦٠^\circ = ٢ \sqrt{٣}$ ل ث.كجم.سم

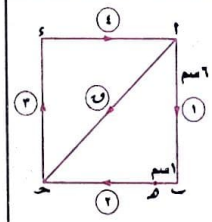
$، ج_{ح} = -٤ \times ل$ ما $٦٠^\circ = -٢ \sqrt{٣}$ ل ث.كجم.سم

$\therefore ج_{م} = ج_{ح}$

$\therefore$ خط عمل المحصلة // $\overleftarrow{أ ح}$

$\because ج_{ل} = -ج_{ح}$ $\therefore$ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب ح}$

١٢



$\because ج_{و} =$ صفر

$\therefore -١ \times ٤ - ٦ \times$

$- ٣ \times ٥ +$ ن

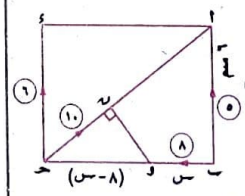
$\times ٥ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} =$ صفر

$\therefore -١ - ٢٤ - ١٥ + \frac{٥}{٢\sqrt{٢}}$ ن $=$ صفر

$\therefore \frac{٥}{٢\sqrt{٢}}$ ن $= ٤٠$

$\therefore$ ن $= \frac{٤٠ \times ٢\sqrt{٢}}{٥} = ٨ \sqrt{٢}$ نيوتن

١٣



$\because ج_{و} = -٤٥$ ث.جم.سم

$\therefore ٥$ س

$- ٦ (٨ -$ س)

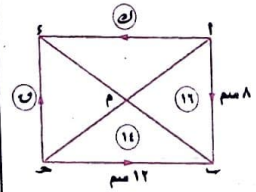
$- ١٠ (٨ -$ س) $\times \frac{٣}{٥} = -٤٥$

$\therefore ٥$ س $- ٤٨ + ٦$ س $- ٤٨ + ٦$ س $= -٤٥$

$\therefore ١٧$ س $= -٤٥ + ٩٦ = ٥١$ $\therefore$ س $= ٣$ سم

$\therefore$ ب و $= ٣$ سم ، و ح $= ٥$ سم

١٤



$\because ج_{ح} =$ صفر

$\therefore -١٦ \times ١٢$

$+ ٨$ ل $=$ صفر

$\therefore$ ل $= ٢٤$ ث.جم

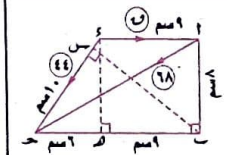
$، \because ج_{م} =$ صفر

$\therefore -١٦ \times ٦ + ١٤ \times ٤ -$ ن $\times ٦ + ٢٤ \times ٤ =$ صفر

$\therefore -٩٦ + ٥٦ - ٦$ ن $+ ٩٦ =$ صفر

$\therefore ٥٦ = ٦$ ن $\therefore$ ن $= ٩ \frac{١}{٢}$ ث.جم

١٥



$\because ج_{ل} =$ صفر

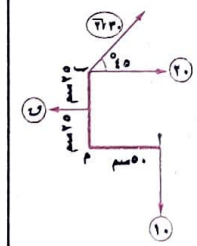
$\therefore -$ ن $\times ٨ + ٦٨$

$\times \frac{١٥ \times ٨}{١٧} + ٤٤ \times ١٥ \times \frac{٨}{١٠} =$ صفر

$\therefore -٨$ ن $+ ٤٨٠ + ٥٢٨ =$ صفر

$\therefore ٨$ ن $= ١٠٠٨$ $\therefore$ ن $= ١٢٦$ ث.جم

١٦



$\because ج_{م} =$ صفر

$\therefore -١٠ \times ٥٠ +$ ن $\times ٢٥$

$- ٢٠ \times ٥٠$

$- ٣٠ \times ٢\sqrt{٢} \times \frac{٥٠}{٢\sqrt{٢}}$

$=$ صفر

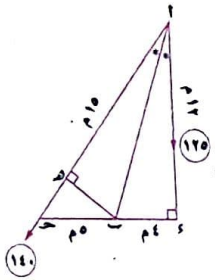
$\therefore -٥٠٠ + ٢٥$ ن $- ١٠٠٠ - ١٥٠٠ =$ صفر

$\therefore ٢٥$ ن $= ٣٠٠٠$ $\therefore$ ن $= ١٢٠$ ث.كجم

١٧

$ج_{ل} = -١٢٥ \times ٤ + ١٤٠ \times \frac{١٢}{١٥} \times ٥ = ٦٠$ نيوتن.م

حل آخر :



$\because \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \overleftarrow{أ ب}$ ينصف د ا

$\therefore \Delta$ ا ء ب $\equiv \Delta$ ا هـ ب

$\therefore ب هـ = ٤$ م

$\therefore ج_{ل} = ١٤٠ \times ٤$

$- ١٢٥ \times ٤ = ٦٠$ نيوتن.م

١٨

$\because ج_{م} = ٠$

$\therefore ١٥٠ \times$ ما $٤٥^\circ \times ٥,٤ -$ ن $\times \frac{٤}{٥} \times ٣,٦ =$ صفر

$\therefore$ ن $= ١٩٨,٩$ نيوتن

١٩

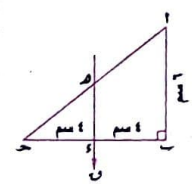
$\because ج_{م} = ٠$ ، بفرض أن وزن العربة = ك ثقل كجم

$\therefore -$ ك $\times ٠,٣ + ١٠٠$ ما $٣٠^\circ \times (٠,٦٥ + ٠,٠٥)$

$+ ١٠٠$ ما $٣٠^\circ \times (٠,٣ + ١,٢) = ٠$

$\therefore$ ك $= ٥٨٢$ ثقل كجم

٢٠



$\because ج_{م} = ج_{ل}$

$\therefore$ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{أ ب}$

$، \because ج_{ل} = -ج_{ح}$

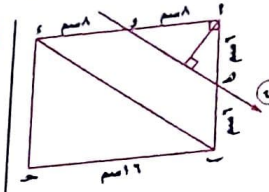
$\therefore$ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{ب ح}$

$، \because ج_{ل} =$ ن $\times ٤ = ٦٠$ $\therefore$ ن $= ١٥$ نيوتن

، خط عملها يوازى $\overline{أ ب}$ ويمر بمنتصف $\overline{ب ح}$

أى تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{هـ ء}$

٢١



∵ $ق(\angle ب) = ق(\angle ء)$

$= ٢٤٠^\circ$

∴ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{ب ء}$

، ∵ $ق_م = -ق$

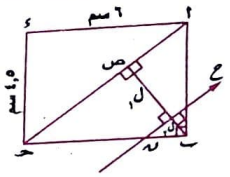
∴ خط عمل $ق$ ينصف $\overline{ا ب}$ ∴ $ق \times \frac{٨ \times ٦}{١٠} = ٢٤٠$

∴ $ق \times ٤,٨ = ٢٤٠$ ∴ $ق = ٥٠$ نيوتن

وخط عملها يوازى $\overleftrightarrow{ب ء}$ ويمر بمنتصف $\overline{ا ب}$

أى تعمل فى اتجاه $\overrightarrow{و هـ}$

٢٢



∵ $ق_م = ق_ح = ٧٢٠$

∴ خط عمل $\overleftarrow{ح}$ // $\overleftrightarrow{ا ح}$

، ∵ $ق_ب = -٢٤٠$

∴ خط عمل $\overleftarrow{ح}$ يقطع $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ب ح}$

∵ $ق_م = ٧٢٠$ ∴ $ح \times ل_١ = ٧٢٠$ (١)

، ∵ $ق_ب = -٢٤٠$

∴ $-ح \times ل_٢ = -٢٤٠$ ∴ $ح \times ل_٢ = ٢٤٠$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٢٤٠}{٧٢٠} = \frac{١}{٣}$

، ∵ $ا ح = \sqrt{(٤,٥)^٢ + (٦)^٢} = ٧,٥$ سم

∴ $ب ص = \frac{٦ \times ٤,٥}{٧,٥} = ٣,٦$ سم

∴ $ل_١ = ٢,٧$ سم

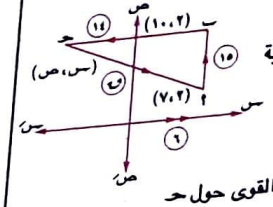
وبالتعويض فى (١) :

∴ $ح = ٢٦٦\frac{٢}{٣}$ ث.كجم

، خط عمل المحصلة يوازى $\overline{ا ح}$ ، يقسم $\overline{ب ح}$ بنسبة ١ : ٣

أى يقطع $\overline{ب ح}$ فى نقطة $د$ تبعد ١,٥ سم عن $ب$

٢٣



∵ المثلث قائم الزاوية فى $ب$

∴ ص = ١٠

، ∵ مجموع عزوم القوى حول $ح$ = عزم المحصلة حول $ح$

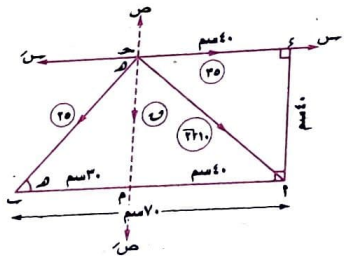
∴ $١٥ \times (٢ - س) = ٦ \times ١٠$ ∴ $س = -٢$

∴ النقطة $ح = (-٢ ، ١٠)$

، ∵ مجموع عزوم القوى حول $ب$ = عزم المحصلة حول $ب$

∴ $ق \times \frac{٤ \times ٣}{٥} = ١٠ \times ٦$ ∴ $ق = ٢٥$ ث.كجم

٢٤



بفرض القوة ٣٥ ث.جم تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{س}$

∴ $س = ٣٥$ جتا $٠ + ١٠$ جا ٣١٥°

$+ ق$ جتا $٢٧٠^\circ + ٢٥$ جتا $(١٨٠^\circ + هـ)$

∴ $س = ٣٥ + ١٠ - ٢٥ \times \frac{٣}{٥} = ٤٥ - ١٥ = ٣٠$ (١)

، $ص = ٣٥$ جا $٠ + ١٠$ جا $٣١٥^\circ + ق$ جا ٢٧٠°

$+ ٢٥$ جا $(١٨٠^\circ + هـ) = -١٠ - ق - ٢٥ \times \frac{٤}{٥}$

∴ $ص = -٣٠ - ق$ (٢)

، ∵ $ح^٢ = س^٢ + ص^٢$

∴ $٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ص^٢$ ∴ $ص^٢ = ١٦٠٠$

∴ $ص = -٤٠$ (ويرفض الحل الموجب)

∴ $-٤٠ = -٣٠ - ق$ ∴ $ق = ١٠$ ث.جم

∴ $ق_م = -٣٥ \times ٤٠ + ١٠ \times ٤٠ + \frac{٤}{٥} \times ٧٠ \times ٢٥$

$= -١٤٠٠ + ٤٠٠ + ١٤٠٠$

$= ٤٠٠$ ث.جم.سم

٢٥ ① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (أ) ⑫ (أ)

إرشادات لحل رقم ٢٥ :

① ∵ معادلة خط عمل $\overleftarrow{ق}$ هى

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، ٣) + ل(٤ ، ٥)$

أى أن : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{٥}{٤}$

∴ النقطة $ا$ (١٠ ، ١٣) تقع على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

∴ $ق_م$ = صفر

② ∵ طول العمود المرسوم من $ب$ على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

= طول العمود المرسوم من النقطة $ح$ على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

∴ إما $\overleftrightarrow{ب ح}$ يوازى خط عمل $\overleftarrow{ق}$

أو خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{ب ح}$

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ب ح} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$ ، ميل $\overleftarrow{ق} = -\frac{٤}{٢}$

∴ $\overleftrightarrow{ب ح}$ لا يوازى خط عمل $\overleftarrow{ق}$

∴ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{ب ح}$

∴ $ق_ب = -ق_ح$

∴ $ق_ب + ق_ح$ = صفر

③ مقدار عزم القوة ٢٠ نيوتن حول النقطة $ا$ يساوى

٢٠×١٥ جا $\theta = ٣٠٠$ جا θ

حيث $٠ \le \theta \le ١٨٠^\circ$

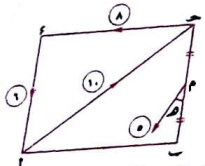
أى أن : $٠ \le$ جا $\theta \le ١$

أصغر قيمة لمقدار العزم = $٣٠٠ \times$ صفر = صفر

وأكبر قيمة لمقدار العزم = $٣٠٠ \times ١ = ٣٠٠$

أى أن مقدار عزم القوة $\in [٠ ، ٣٠٠]$

④



∵ عزم القوى المعطاة بخلاف القوة التى مقدارها ٥ حول النقطة $ب$

$= ٦ \times ١٦ + ٨ \times ١٢ - ١٠ \times \frac{١٦ \times ١٢}{٢٠} = ٩٦$

، ∵ $ق_ب = ١١١$

∴ عزم القوة ٥ حول $ب = ١١١ - ٩٦ = ١٥$

ويفرض أن القوة التى مقدارها ٥ نيوتن تميل على $\overline{ب ح}$ بزاوية قياسها $هـ$

∴ ٥ جا $هـ \times ٦ = ١٥$ ∴ جا $هـ = \frac{١}{٢}$

∴ $ق(\angle هـ) = ٣٠^\circ$

⑤ ∵ $\overleftarrow{ق}$ // المستقيم $ل$

∴ $ق_م = ق_ب = ق_ح = ق_ء$

، ∵ $٣ق_م + ٢ق_ب = ٣٠$

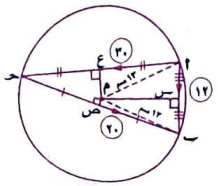
∴ $٥ق_م = ٣٠$ ∴ $ق_م = ٦$ نيوتن.سم

∴ $ق_ب = ق_ح = ق_ء = ٦$ نيوتن.سم

∴ $٣ق_ب - ٢ق_ح + ق_ء = ١٨ - ١٢ + ٦$

$= ١٢$ نيوتن.سم

⑥



∵ م س = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

، م ص = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٤\sqrt{١٠})^٢}$ = ٣ سم

، م ع = $\sqrt{(١٣)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٥ سم

∴ ج$_م$ = −١٢ × ١٢ + ٢٠ × ٣ + ٣٠ × ٥

= ٦٦ وحدة عزم

⑦ ∵ ء منتصف $\overline{أب}$

∴ ج$_م$ + ج$_ب$ = ٢ ج$_ء$

، ∵ ج$_م$ = ٢ ج$_ب$ ∴ ٣ ج$_ب$ = ٢ ج$_ء$

∴ ج$_ب$ = $\frac{٢}{٣}$ ج$_ء$ ∴ ج$_م$ = $\frac{٤}{٣}$ ج$_ء$

∴ ج$_ب$ − ج$_م$ = $\frac{٢}{٣}$ ج$_ء$ − $\frac{٤}{٣}$ ج$_ء$ = $\frac{-٢}{٣}$ ج$_ء$

⑧ ∵ قطرى المستطيل ينصف كلًا منها الآخر

∴ ج$_م$ + ج$_حـ$ = ٢ ج$_م$

∴ −٢٨ + ج$_حـ$ = ٢ × ٢٤

∴ ج$_حـ$ = ٧٦ نيوتن.متر

⑨ ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع

∴ ج$_م$ + ج$_حـ$ = ج$_ب$ + ج$_ء$

∴ −١٨ + ج$_حـ$ = ٣٢ + ٣٢

∴ ج$_حـ$ = ٨٢ وحدة عزم.

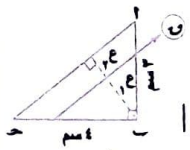
⑩ ∴ ء تقسم $\overline{ب حـ}$ بنسبة ١ : ٥

∴ ٥ ج$_ب$ + ج$_حـ$ = ٦ ج$_ء$

∴ ٥ × ١٠ + ج$_حـ$ = ٦ × ٦

∴ ج$_حـ$ = − ١٤ نيوتن.سم

⑪ الحالة الأولى ق كما بشكل (١)



∴ ‖ج$_ب$ − ج$_م$‖

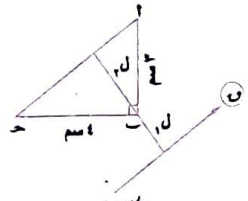
= | − ق$_١$ × ع$_١$ − ق$_٢$ × ع$_٢$ |

= | − ق$_١$ × (ع$_١$ + ع$_٢$) |

= | −١٥ × $\frac{٣ \times ٤}{٥}$ | = ٣٦ نيوتن.سم

شكل(١)

الحالة الثانية ق كما بشكل (٢)



شكل(٢)

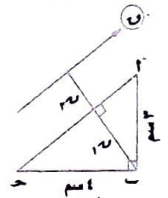
‖ج$_ب$ − ج$_م$‖ = | ق$_١$ × ل$_١$ − ق$_٢$ × (ل$_١$ + ل$_٢$) |

= | ق$_٢$ × (− ل$_٢$) |

= | ١٥ × − $\frac{٣ \times ٤}{٥}$ |

= ٣٦ نيوتن.سم

الحالة الثالثة ق كما بشكل (٣)



شكل(٣)

‖ج$_ب$ − ج$_م$‖ = | − ق$_٣$ (ل$_١$ + ل$_٢$) + ق$_٢$ × ل$_٢$ |

= | − ق$_١$ × ل$_١$ |

= | −١٥ × $\frac{٣ \times ٤}{٥}$ |

= ٣٦ نيوتن.سم

⑫ ∵ ج$_م$ = ٢ ج$_ب$

= ج$_حـ$

∴ $\frac{ج_م}{٦} = \frac{ج_ب}{٣} = \frac{ج_حـ}{٢}$

∴ النسبة بين أطوال الأعمدة

المقامة على خط عمل القوة هى ٦ : ٣ : ٢



∴ $\frac{ص ب}{س أ} = \frac{١}{٤}$ ∴ $\frac{حـ ب}{حـ أ} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{حـ ب}{ب أ} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{٢}{١}$

㊻

∵ ب حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٢)^٢}$ = ٣ سم

∴ ج$_م$ = ق$_١$ جا θ × ٢ + ق$_٢$ جا θ × ٣

∵ معيار العزم أصغر ما يمكن

∴ ٨٠٠ جتا θ + ١٢٠٠ جا θ = ٠ (÷ جتا θ)

∴ ٨٠٠ + ١٢٠٠ ظا θ = ٠ ∴ ظا θ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ق (د θ) = ١٩° ١٤٦

حل آخر :

أقل قيمة لمعيار العزم حول أ = صفر

وهذا يحدث إذا كانت ق تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

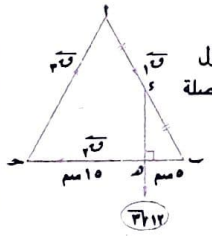
∴ θ تكمل زاوية ∝

، ∵ ظا ∝ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ∝ = ٤١° ٣٣

∴ θ = ١٨٠° − ٤١° ٣٣ = ١٩° ١٤٦

㊼

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة



، ∵ ج$_ب$ = − ق$_٣$ × ٢٠ جتا ٦٠°

= ١٢ × $\sqrt{٣}$ × ٥

∴ ق$_٣$ = −٦

∴ ق$_٣$ = ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أ حـ}$

، ∵ ج$_حـ$ = − ق$_١$ × ٢٠ جا ٦٠° = −١٢ × $\sqrt{٣}$ × ١٥

∴ ق$_١$ = ١٨ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

، ∵ ج$_م$ = − ق$_٢$ × ٢٠ جا ٦٠° = −١٢ × $\sqrt{٣}$ × ٥

∴ ق$_٢$ = ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$

㊽

∵ طول $\overline{أ ب}$ = س + ١٢ − ٢,٥ = (س + ٩,٥) متر

∴ معيار العزم عند أ = ٢١٠ (س + ٩,٥) جتا θ

، ∵ جتا θ ≥ ١

∴ أكبر قيمة لـ جتا θ = ١ عندما θ = صفر

∴ معيار العزم يكون أكبر ما يمكن

عندما θ = صفر ، س = ٤

∴ أقصى عزم = ٢١٠ × ١٣,٥ = ٢٨٣٥ ث.كجم.متر

㊾

ب حـ = $\sqrt{٢٣^٢ + ٢٦^٢ - ٢ \times ٣ \times ٦ \times}$ جتا ١٠٥° = ٧,٣٧

فى Δ ب أ حـ : $\frac{٦}{جا حـ} = \frac{٧,٣٧}{جا ١٠٥°}$

∴ ق (د حـ) = ٥١° ٥١

، ∵ ج$_م$ = ١٥٠٠ ∴ ق جا ٥١° ٥١° × ٣ = ١٥٠٠

∴ ق = ٦٣٦ نيوتن

إجابات تمارين 4

①

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (ب)

②

① وأ = أ − و = (−١ ، ٢ ، ١)

∴ ج$_و$ = وأ × ق

= (−١ ، ٢ ، ١) × (٣ ، −٤ ، −١٢)

$$= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & -١٢ \end{vmatrix}$$

= −٢٠ س − ٩ ص − ٢ ع

② طول العمود من نقطة الأصل

$$= \frac{\|ج_و\|}{\|ق\|} = \frac{\sqrt{(-٢٠)^٢ + (-٩)^٢ + (-٢)^٢}}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢ + (-١٢)^٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٤٨٥}}{١٣}$$ وحدة طول.

٣

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (١ ، ١ ، ١) \times (-٢ ، ٣ ، ٥)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

$= ٢\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

∴ طول العمود من نقطة الأصل

$= \frac{\|\overrightarrow{جـ}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{(٢)^٢ + (-٧)^٢ + (٥)^٢}}{\sqrt{(-٢)^٢ + (٣)^٢ + (٥)^٢}}$

$= \frac{\sqrt{٧٤١}}{١٩}$ وحدة طول.

٤

① $\overrightarrow{أ و} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = (١ ، -١ ، ٤)$

∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = (١ ، -١ ، ٤) \times (٢ ، ٣ ، -١)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

$= -١١\overrightarrow{س} + ٩\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

② $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-١ ، ٢ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = (-١ ، ٢ ، ٣) \times (٢ ، ٣ ، -١)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

$= -١١\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$

، طول العمود من «ب»

$= \frac{\|\overrightarrow{جـ}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{(-١١)^٢ + (٥)^٢ + (-٧)^٢}}{\sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢ + (-١)^٢}}$

$\approx ٣,٧٣$ وحدة طول.

٥

$\overrightarrow{جـ ص} = \overrightarrow{ع ق_س} - \overrightarrow{س ق_ع} = ٢ \times ١٥ - (-٢ \times ٤٠)$

$= ١٥٠$

٦

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = (٤ ، -٢ ، ٠) \times (٢ ، ل ، -١)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٤ & -٢ & ٠ \\ ٢ & ل & -١ \end{vmatrix}$

$= ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + (٤ل + ٤)\overrightarrow{ع}$

∴ $٤ل + ٤ = ١٦$ ∴ $ل = ٣$

٧

$\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-١ ، ١ ، -٤)$

∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = (-١ ، ١ ، -٤) \times (٣ ، ل ، ٤)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ١ & -٤ \\ ٣ & ل & ٤ \end{vmatrix}$

$= (٤ + ٤ل)\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص} + (-ل - ٣)\overrightarrow{ع}$

∴ $٤ + ٤ل = -٤$ ∴ $ل = -٢$

٨

$\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٣ ، -٤ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = (٣ ، -٤ ، -١) \times (٥ ، ل ، -١)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & -٤ & -١ \\ ٥ & ل & -١ \end{vmatrix}$

$= (٤ + ل)\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + (٣ل + ٢٠)\overrightarrow{ع}$

∴ $٤ + ل = -٥$ ∴ $ل = -٩$

٩

نفرض أن نقطة تأثير القوة هى (س ، ٢ ، ع)

∴ $\overrightarrow{ر} = (س ، ٢ ، ع)$

∴ $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ س & ٢ & ع \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

$= (-٢ - ٣ع)\overrightarrow{س} - (-س - ٢ع)\overrightarrow{ص}$

$+ (٣س - ٤)\overrightarrow{ع}$

∴ $-٢ - ٣ع = -٥$ ∴ $ع = ١$

، $س + ٢ع = ٣$ ∴ $س = ١$

، طول العمود من نقطة الأصل

$= \frac{\|\overrightarrow{جـ}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{(-٥)^٢ + (٣)^٢ + (-١)^٢}}{\sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢ + (-١)^٢}}$

$= \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ وحدة طول.

١٠

∵ $\overrightarrow{ق}$ توازى محور السينات

∴ $\overrightarrow{ق} = (ق_س ، ٠ ، ٠)$

، $\overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = (٢ ، -١ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ق_س & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$= -(-٣ق_س)\overrightarrow{ص} + (ق_س)\overrightarrow{ع}$

∴ $٣ق_س = ٢١$ ∴ $ق_س = ٧$

∴ $\overrightarrow{ق} = ٧\overrightarrow{س}$

١١

$\overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = (-١ ، ٣ ، -٢)$

، ∵ $\overrightarrow{جـ ص} = \overrightarrow{ص ق_ع} - \overrightarrow{ع ق_ص}$

∴ $-٣ = ٣ \times ١ - (-٢ \times ب)$

∴ $-٣ = ٣ + ٢ب$ ∴ $ب = -٣$

، $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$

$= -٣\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$

∴ طول العمود من نقطة الأصل

$= \frac{\|\overrightarrow{جـ}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢ + (-٣)^٢}}{\sqrt{(٢)^٢ + (-٣)^٢ + (١)^٢}}$

$= \frac{٣\sqrt{٤٢}}{١٤}$ وحدة طول.

١٢

$\overrightarrow{جـ ص} = \overrightarrow{ص ق_ع} - \overrightarrow{ع ق_ص}$

∴ $-١ = ١ \times ١ - (-٢) \times م$

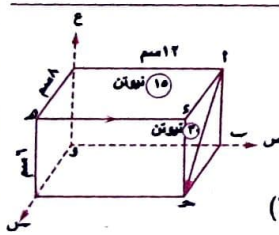
∴ $-١ = -٢ - م$ ∴ $م = -١$

، $\overrightarrow{جـ ص} = \overrightarrow{ع ق_س} - \overrightarrow{س ق_ع}$

∴ $-٨ = ١ \times ل - ٣ \times -٢$

∴ $-٨ = ل + ٦$ ∴ $ل = -١٤$

١٣



من هندسة الشكل :

$\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{ع} - \overrightarrow{ه}$

$= (٨ ، ١٢ ، ٦)$

$- (٨ ، ٠ ، ٦)$

$= (٠ ، ١٢ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{ق_١} = ١٥ \times \frac{\overrightarrow{ه ء}}{\|\overrightarrow{ه ء}\|}$

$= ١٥ \times \frac{(٠ ، ١٢ ، ٠)}{\sqrt{(٠)^٢ + (١٢)^٢ + (٠)^٢}}$

$= (٠ ، ١٥ ، ٠)$

$= \frac{|\overrightarrow{جـ ب}|}{|\overrightarrow{ب ن}|} = \frac{\sqrt{(-11)^2 + (5)^2 + (-7)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}}$

$\approx 3,73$ وحدة طول.

$\therefore$ ك $= -9$ $\quad$ $\therefore$ ٤ + ك $= -5$

$= (٤ + ك)\overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص} + (٣ك + ٢٠)\overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ا ن} = \overrightarrow{ن} - \overrightarrow{ا} = (-١ ، ٣ ، -٢)$

$\therefore$ جـ $\in \overrightarrow{ا ن}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ص} + ع \overrightarrow{ا ن}$

$= \frac{(٠ ، ١٢ ، ٠)}{\sqrt{(٠)^2 + (١٢)^2 + (٠)^2}} \times ١٥$

$= (٠ ، ١٥ ، ٠)$

$\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا} = (٨ ، ١٢ ، ٠) - (٠ ، ١٢ ، ٦)$

$= (٨ ، ٠ ، -٦)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ن_١} = \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|} \times ٣٠$

$= \frac{(٨ ، ٠ ، -٦)}{\sqrt{(٨)^2 + (٠)^2 + (-٦)^2}} \times ٣٠$

$= (٢٤ ، ٠ ، -١٨)$

$\therefore$ $\overrightarrow{جـ_ر} = \overrightarrow{و ا} \times \overrightarrow{ن_١} + \overrightarrow{و هـ} \times \overrightarrow{ن_٢}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٦ & ١٢ & ٠ \\ ٢٤ & ٠ & -١٨ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٦ & ٠ & ٨ \\ ٠ & ١٥ & ٠ \end{vmatrix}$

$= -٢١٦\overrightarrow{س} + ١٤٤\overrightarrow{ص} - ٢٨٨\overrightarrow{ع}$

$- ٩٠\overrightarrow{س} + ١٢٠\overrightarrow{ع}$

$= -٣٠٦\overrightarrow{س} + ١٤٤\overrightarrow{ص} - ١٦٨\overrightarrow{ع}$

١٤

من هندسة الشكل :

ا $= (٠ ، ٠ ، ٣)$ ، ب $= (٤ ، ١٢ ، ٠)$

، ء $= (٠ ، ١٢ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا} = (٤ ، ١٢ ، -٣)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|}$

$= ١٣٠ \times \frac{(٤ ، ١٢ ، -٣)}{\sqrt{(٤)^2 + (١٢)^2 + (-٣)^2}}$

$= (٤٠ ، ١٢٠ ، -٣٠)$

، $\because$ $\overrightarrow{ء ا} = \overrightarrow{ا} - \overrightarrow{ء} = (٠ ، -١٢ ، ٣)$

$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{ء ا} \times \overrightarrow{ق}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -١٢ & ٣ \\ ٤٠ & ١٢٠ & -٣٠ \end{vmatrix}$

$= ١٢٠\overrightarrow{ص} + ٤٨٠\overrightarrow{ع}$

١٥

من هندسة الشكل :

هـ $= (٠ ، ٠ ، ١٠)$ ، م $= (٥ ، ١٠ ، ٥)$

$\therefore$ $\overrightarrow{هـ م} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{هـ} = (٥ ، ١٠ ، -٥)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{هـ م}}{|\overrightarrow{هـ م}|} = ٢٥\sqrt{٦} \times \frac{(٥ ، ١٠ ، -٥)}{\sqrt{٢٥ + ١٠٠ + ٢٥}}$

$= ٥ (٥ ، ١٠ ، -٥) = (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$

$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{و هـ} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ٠ ، ١٠) \times (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١٠ & ٠ & ٠ \\ ٢٥ & ٥٠ & -٢٥ \end{vmatrix}$

$= -٥٠٠\overrightarrow{س} + ٢٥٠\overrightarrow{ص}$

$\therefore$ مركبة عزم القوة ق بالنسبة للمحور س $= -٥٠٠$

، مركبة عزم القوة ق بالنسبة للمحور ص $= ٢٥٠$

، مركبة عزم القوة ق بالنسبة للمحور ع $=$ صفر.

١٦

من هندسة الشكل :

ا $= (٠ ، ٠ ، ١٠)$ ، ء $= (٦ ، ٨ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{ا} = (٦ ، ٨ ، -١٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ء}}{|\overrightarrow{ا ء}|}$

$= ٢٠\sqrt{٢} \times \frac{(٦ ، ٨ ، -١٠)}{\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2 + (-١٠)^2}}$

$= (١٢ ، ١٦ ، -٢٠)$

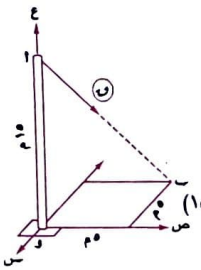
$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{و ا} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ٠ ، ١٠) \times (١٢ ، ١٦ ، -٢٠)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١٢ & ١٦ & ٠ \\ ٢٠- & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$= -١٦٠\overrightarrow{س} + ١٢٠\overrightarrow{ص}$

١٧

من هندسة الشكل :



ا $= (٠ ، ٠ ، ١٥)$

، ب $= (-٥ ، ٥ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا}$

$= (-٥ ، ٥ ، -١٥)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|}$

$= ١٥\sqrt{١١} \times \frac{(-٥ ، ٥ ، -١٥)}{\sqrt{(-٥)^2 + (٥)^2 + (-١٥)^2}}$

$= (-١٥ ، ١٥ ، -٤٥)$

$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{و ا} \times \overrightarrow{ق}$

$= (٠ ، ٠ ، ١٥) \times (-١٥ ، ١٥ ، -٤٥)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١٥- & ١٥ & ٤٥- \\ ٠ & ٠ & ١٥ \end{vmatrix}$

$= -٢٢٥\overrightarrow{س} - ٢٢٥\overrightarrow{ص}$

١٨

من هندسة الشكل :

ا $= (٠ ، ٢ ، ٢)$ ، ب $= (-١ ، ٢ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا} = (-١ ، ٠ ، -٢)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|} = ١٤\sqrt{٥} \times \frac{(-١ ، ٠ ، -٢)}{\sqrt{(-١)^2 + (٠)^2 + (-٢)^2}}$

$= (-١٤ ، ٠ ، -٢٨)$

$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{و ا} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ٢ ، ٠) \times (-١٤ ، ٠ ، -٢٨)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٢٨- & ٠ & ١٤- \end{vmatrix}$

$= -٥٦\overrightarrow{س} - ٢٨\overrightarrow{ص} + ٢٨\overrightarrow{ع}$

١٩

من هندسة الشكل :

ا $= (٠ ، ١٢ ، ٠)$ ، ب $= (٣ ، ٤ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا} = (٣ ، ٤ ، -١٢)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|} = ٢٦ \times \frac{(٣ ، ٤ ، -١٢)}{\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2 + (-١٢)^2}}$

$= (٦ ، ٨ ، -٢٤)$

$\therefore$ جـ$_ر$ $= \overrightarrow{و ا} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ١٢ ، ٠) \times (٦ ، ٨ ، -٢٤)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٦ & ٨ & ٠ \\ ٢٤- & ٠ & ١٢ \end{vmatrix}$

$= -٩٦\overrightarrow{س} + ٧٢\overrightarrow{ص}$

٢٠

من هندسة الشكل :

ا $= (١ ، ٤ ، ٢)$ ، ب $= (٤ ، ٠ ، ٠)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ا ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ا} = (٣ ، -٤ ، -٢)$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق} = ن \times \frac{\overrightarrow{ا ب}}{|\overrightarrow{ا ب}|}$

$= ٢\sqrt{٢٩} \times \frac{(٣ ، -٤ ، -٢)}{\sqrt{(٣)^2 + (-٤)^2 + (-٢)^2}}$

$= (٦ ، -٨ ، -٤)$

$\therefore \overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = (١ ، ٤ ، ٢) \times (٦ ، -٨ ، -٤)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ٦ & -٨ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= ١٦ \overrightarrow{ص} - ٣٢ \overrightarrow{ع}$

٢١

من هندسة الشكل :

$أ = (٠,٨ ، ١ ، ٠,٦)$

$\overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (-١٠٠ ، ١٣٠ ، ١٧٥)$

$\therefore \overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ج}$

$= (٠,٨ ، ١ ، ٠,٦) \times (-١٠٠ ، ١٣٠ ، ١٧٥)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠,٨ & ١ & ٠,٦ \\ -١٠٠ & ١٣٠ & ١٧٥ \end{vmatrix}$$

$= ٩٧ \overrightarrow{س} - ٢٠٠ \overrightarrow{ص} + ٢٠٤ \overrightarrow{ع}$

٢٢

من هندسة الشكل :

$أ = (٣ ، ٣ ، -٢)$

$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (-٣٠ ، -٢٠ ، ٨٠)$

$\therefore \overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ج}$

$= (٣ ، ٣ ، -٢) \times (-٣٠ ، -٢٠ ، ٨٠)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٣ & -٢ \\ -٣٠ & -٢٠ & ٨٠ \end{vmatrix}$$

$= ٢٠٠ \overrightarrow{س} - ١٨٠ \overrightarrow{ص} + ٣٠ \overrightarrow{ع}$

٢٣

$ق_س = ٢٠٠ \text{ نا } ٦٠° = ١٠٠$

$ق_ص = ٠ ، ق_ع = -٢٠٠ \text{ نا } ٣٠° = -١٠٠ \sqrt{٣}$

$\therefore \overrightarrow{ق} = (١٠٠ ، ٠ ، -١٠٠ \sqrt{٣})$

من هندسة الشكل :

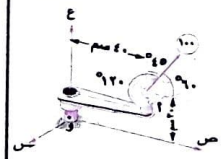
$أ = (٠ ، ٠ ، -٥) ، حـ = (٢,٥ ، ٦ ، ٠)$

$\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (٧,٥ ، ٦ ، ٠)$

$$\therefore \overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{أحـ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٦ & ٧,٥ \\ ١٠٠ & ٠ & -١٠٠ \sqrt{٣} \end{vmatrix}$$

$= -٦٠٠ \sqrt{٣} \overrightarrow{س} + ٧٥٠ \overrightarrow{ص} - ٦٠٠ \overrightarrow{ع}$

٢٤



من هندسة الشكل :

$أ = (٠ ، ٤٠ ، ٣٠)$

$ق_س = ١٠٠ \text{ نا } ١٢٠°$

$= -٥٠$

$ق_ص = ١٠٠ \text{ نا } ٦٠° = ٥٠$

$ق_ع = ١٠٠ \text{ نا } ٤٥° = ٥٠ \sqrt{٢}$

$\therefore \overrightarrow{ق} = (-٥٠ ، ٥٠ ، ٥٠ \sqrt{٢})$

∴ العزوم حول محور س = ص $ق_ع$ − ع $ق_ص$

$= ٤٠ \times ٥٠ \sqrt{٢} - ٣٠ \times ٥٠$

$= ١٣٢٨,٤٣$ نيوتن.سم

٢٥

من هندسة الشكل :

$ب = (٠ ، ٦ ، ٠) ، حـ = (-٢ ، ٠ ، ١,٥)$

$\overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب} = (-٢ ، -٦ ، ١,٥)$

$\therefore \overrightarrow{سه} = \overrightarrow{بحـ} \times \dfrac{\overrightarrow{بحـ}}{\|\overrightarrow{بحـ}\|}$

$= ٦,٥ \times \dfrac{(-٢ ، -٦ ، ١,٥)}{\sqrt{(-٢)^2 + (-٦)^2 + (١,٥)^2}}$

$= (-٢ ، -٦ ، ١,٥)$

$\therefore \overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{سه}$

$\because \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، ٦ ، ٠)$

$\therefore \overrightarrow{ج_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٦ & ٠ \\ -٢ & -٦ & ١,٥ \end{vmatrix}$

$= ٩ \overrightarrow{س} + ١٢ \overrightarrow{ع}$

٢٦

من هندسة الشكل :

$أ = (٠ ، ٠ ، ٦) ، ب = (٠ ، ٤ ، ٠) ، حـ = (٤ ، -٣ ، ٠)$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، ٤ ، -٦)$

$\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، -٣ ، -٦)$

$\therefore \overrightarrow{ق_1} = ق \times \dfrac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$

$= ٦ \sqrt{١٣} \times \dfrac{(٠ ، ٤ ، -٦)}{\sqrt{(٠)^2 + (٤)^2 + (-٦)^2}}$

$= (٠ ، ١٢ ، -١٨)$

$\overrightarrow{ق_2} = ق \times \dfrac{\overrightarrow{أحـ}}{\|\overrightarrow{أحـ}\|}$

$= \sqrt{٦١} \times \dfrac{(٤ ، -٣ ، -٦)}{\sqrt{(٤)^2 + (-٣)^2 + (-٦)^2}}$

$= (٤ ، -٣ ، -٦)$

① مجموع العزوم حول «و»

$= \overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{وحـ} \times \overrightarrow{ق_2}$

$= (٠ ، ٠ ، ٦) \times (٠ ، ١٢ ، -١٨)$

$+ (٤ ، -٣ ، ٠) \times (٤ ، -١٣ ، -٦)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ١٢ & -١٨ \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٤ & -٣ & ٠ \\ ٤ & -٣ & -٦ \end{vmatrix}$$

$= -٧٢ \overrightarrow{س} + ١٨ \overrightarrow{س} + ٢٤ \overrightarrow{ص}$

$= -٥٤ \overrightarrow{س} + ٢٤ \overrightarrow{ص}$ (١)

② المحصلة $(\overrightarrow{ج}) = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (٤ ، ٩ ، -٢٤)$

$\therefore \overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ج} = (٠ ، ٠ ، ٦) \times (٤ ، ٩ ، -٢٤)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ٦ \\ ٤ & ٩ & -٢٤ \end{vmatrix}$$

$= -٥٤ \overrightarrow{س} + ٢٤ \overrightarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن مجموع عزوم القوى حول نقطة فى الفراغ يساوى عزم المحصلة لهذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

٢٧

من هندسة الشكل :

$أ = (٢ ، ٠ ، ٤) ، ى = (٠ ، ٣ ، ٠)$

$\overrightarrow{أى} = \overrightarrow{ى} - \overrightarrow{أ} = (-٢ ، ٣ ، -٤)$

$\overrightarrow{سه} = \overrightarrow{سه} \times \dfrac{\overrightarrow{أى}}{\|\overrightarrow{أى}\|}$

$= ١٠ \sqrt{٢٩} \times \dfrac{(-٢ ، ٣ ، -٤)}{\sqrt{(-٢)^2 + (٣)^2 + (-٤)^2}}$

$= (-٢٠ ، ٣٠ ، -٤٠)$

$\therefore \overrightarrow{ج_حـ} = \overrightarrow{حـأ} \times \overrightarrow{سه}$

$\overrightarrow{حـأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (٢ ، ٠ ، ٤)$

$\therefore \overrightarrow{ج_حـ} = (٢ ، ٠ ، ٤) \times (-٢٠ ، ٣٠ ، -٤٠)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٤ \\ -٢٠ & ٣٠ & -٤٠ \end{vmatrix}$$

$= -١٢٠ \overrightarrow{س} + ٦٠ \overrightarrow{ع}$

إجابات
تمارين

الوحدة الثالثة



القوى المتوازية المستوية

إجابات تمارين 5

أولاً تمارين على محصلة القوتين متوازيتين

- بفرض أن $\overrightarrow{ق}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين متحدتى الاتجاه أ، فى اتجاه القوة الأكبر فى حالة القوتين متضادتى الاتجاه.
- نقطة حـ هى نقطة تأثير المحصلة.

١

ح = ٢٣ + ١٥ = ٣٨ نيوتن وفى اتجاه القوتين

، ٢٣ × أحـ

= ١٥ (٥٧ − أحـ)

∴ ٢٣ أحـ

= ٨٥٥ − ١٥ أحـ

∴ ٣٨ أحـ = ٨٥٥ ∴ أحـ = $\frac{1}{2}$ ٢٢ سم

∴ حـ ∈ $\overline{أب}$ ، حـ تبعد مسافة $\frac{1}{2}$ ٢٢ سم عن أ

٢

ح = ٨٠ − ٣٠

= ٥٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه القوة

٨٠ نيوتن

، ٨٠ أحـ = ٣٠ (١٢,٥ + أحـ)

∴ ٨ أحـ = ٣٧,٥ + ٣ أحـ

∴ ٥ أحـ = ٣٧,٥ ∴ أحـ = ٧,٥ سم

∴ نقطة تأثير المحصلة حـ ∈ $\overline{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$

، أحـ = ٧,٥ سم

٣

① ح = ٣٠ + ٧٠

= ١٠٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه القوتين

، ٣٠ × أحـ = ٧٠ (٢٠٠ − أحـ)

∴ ٣ أحـ = ١٤٠٠ − ٧ أحـ

∴ ١٠ أحـ = ١٤٠٠ ∴ أحـ = ١٤٠ سم

∴ نقطة تأثير المحصلة حـ ∈ $\overline{أب}$

، أحـ = ١٤٠ سم

② ح = ٧٠ − ٣٠

= ٤٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه القوة

٧٠ نيوتن

، ٣٠ × (٢٠٠ + بحـ) = ٧٠ بحـ

∴ ٦٠٠ + ٣ بحـ = ٧ بحـ ∴ ٦٠٠ = ٤ بحـ

∴ بحـ = ١٥٠ سم ∴ أحـ = ٣٥٠ سم

∴ نقطة تأثير المحصلة حـ ∈ $\overline{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$

، أحـ = ٣٥٠ سم

٤

① ح = ق٢ − ق١

٢٠ = ق٢ − ١٥

∴ ق٢ = ٣٥ نيوتن

، ق١ × أحـ = ق٢ × بحـ

١٥ × ٧٠ = ٣٥ × بحـ

∴ بحـ = ٣٠ سم ∴ أب = ٤٠ سم

② ق١ × أحـ = ق٢ × بحـ

ق١ × ٢٤ = ٦ × ٨٠

∴ ق١ = ٢٠ نيوتن

، ح = ق١ − ق٢

∴ ح = ٢٠ − ٦ = ١٤ نيوتن

٥

① ١٠ = ٦ + ق

∴ ق = ٤ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة

، ٦ × ١ = ٤ × س

∴ س = ١,٥ سم

② ٨ = ق − ٣٠ ∴ ق = ٣٨ نيوتن

، ٣٠ × (س + ١,٥) = ٣٨ × ١,٥

∴ ٣٠ × س + ٤٥ = ٥٧ ∴ س = ٠,٤ سم

③ ح = ٦ $\frac{1}{4}$ + ٣ $\frac{3}{4}$

= ١٠ نيوتن

، ٣ $\frac{3}{4}$ × س

= $\frac{1}{4}$ ٦ × (٤٠ − س)

∴ ٣ $\frac{3}{4}$ × س = ٢٥٠ − ٦ $\frac{1}{4}$ س

∴ ١٠ س = ٢٥٠ ∴ س = ٢٥ سم

④ ق١ + ق٢ = ١٨ نيوتن (١)

، ق١ × ١٢,٥

= ١٠ × ق٢

∴ ق٢ = ١,٢٥ ق١

وبالتعويض فى (١) :

∴ ق١ + ١,٢٥ ق١ = ١٨

∴ ق١ = ٨ نيوتن

، من (١) : ∴ ق٢ = ١٠ نيوتن

⑤ ١٥ = ق١ − ق٢ (١)

، ق٢ × ٤٠

= ق١ × ١٦

∴ ق١ = ٢,٥ ق٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ ١٥ = ٢,٥ ق٢ − ق٢

∴ ١٥ = ١,٥ ق٢

∴ ق٢ = ١٠ نيوتن ، ق١ = ٢٥ نيوتن

⑥ ∵ ق × ٢٧,٥

= ١٢,٥ × ٢٧,٥

∴ ق = ٩ $\frac{1}{2}$ نيوتن

، ∵ ق + ٢٧,٥ = ح

∴ ح = ٣٦ $\frac{2}{3}$

٦

ق١ × أحـ = ق٢ × بحـ

٩ × ٩ = ١٥ × بحـ

∴ بحـ = ٥,٤ م

∴ أب = ٣,٦ م

٧

٧ × أحـ = ٥ × ٢ $\frac{1}{3}$

∴ أحـ = ١ $\frac{2}{3}$ م

∴ أب = ٤ م

أى أن المسافة بين القوتين = ٤ م

٨

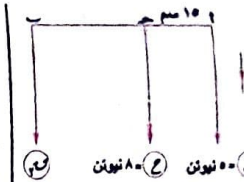
٧ × ٤ $\frac{1}{2}$ = ٩ × بحـ

∴ بحـ = ٣,٥ سم

∴ أب = ٤,٥ − ٣,٥ = ١ سم

أى أن المسافة بين القوتين = ١ سم

٩



① ٨ = ٥ + $ق_2$

∴ $ق_2$ = ٣ نيوتن

وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ق_1}$

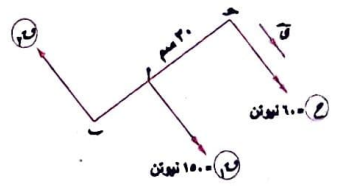
، ٥ × ١٥ = ٣ × ب حـ

∴ ب حـ = ٢٥ سم

∴ $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثر فى ب ∈ $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، ب ∉ $\overline{أ حـ}$

، ب حـ = ٢٥ سم

②



٦٠ = ١٥٠ - $ق_2$ ∴ $ق_2$ = ٩٠ نيوتن

وتعمل فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ق_1}$

، ١٥٠ × ٣٠ = ٩٠ × (٣٠ + أ ب)

∴ ٤٥٠٠ = ٢٧٠٠ + ٩٠ أ ب

∴ أ ب = ٢٠ سم

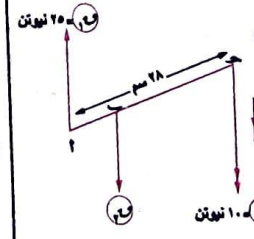
∴ $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثر فى ب ∈ $\overleftrightarrow{حـ أ}$ ، ب ∉ $\overline{حـ أ}$

، أ ب = ٢٠ سم

③ ١٠ = $ق_2$ - ٢٥

∴ $ق_2$ = ٣٥ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة



، ٢٥ × ٢٨ = ٣٥ × ب حـ

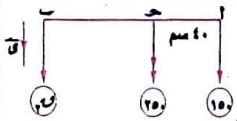
∴ ب حـ = ٢٠ سم

∴ $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثر فى ب ∈ $\overline{أ حـ}$ ، ب حـ = ٢٠ سم

١٠

① (ب)	② (د)	③ (د)	④ (د)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (أ)	⑫ (أ)
⑬ (جـ)	⑭ (أ)	⑮ (د)	

١١



① ٢٥٠ = ١٥٠ + $ق_2$

∴ $ق_2$ = ١٠٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه القوة ١٥٠ نيوتن

، ١٥٠ × ٤٠ = ١٠٠ ب حـ

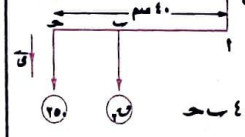
∴ ب حـ = ٦٠ سم

∴ البُعد بين القوتين = ١٠٠ سم

② ٢٥٠ = $ق_2$ - ١٥٠

∴ $ق_2$ = ٤٠٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة

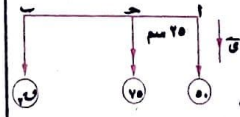


، ١٥٠ × ٤٠ = ٤٠٠ ب حـ

∴ ب حـ = ١٥ سم

∴ المسافة بين القوتين = ٢٥ سم

١٢



① ٧٥ = ٥٠ + $ق_2$

∴ $ق_2$ = ٢٥ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة

، ٥٠ × ٢٥ = ٢٥ × ب حـ

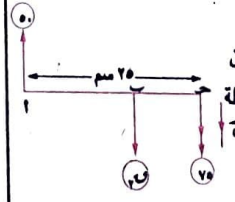
∴ ب حـ = ٥٠ سم ∴ أ ب = ٧٥ سم

∴ المسافة بين القوتين = ٧٥ سم

② ٧٥ = $ق_2$ - ٥٠

∴ $ق_2$ = ١٢٥ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة



، ١٢٥ × ب حـ

= ٥٠ × ٢٥

∴ ب حـ = ١٠ سم ∴ أ ب = ١٥ سم

∴ المسافة بين القوتين = ١٥ سم

١٣

① ٤٠ = ٨٠ - $ق_2$

∴ $ق_2$ = ٤٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه مضاد للمحصلة

، ٤٠ (أ ب + ٣٠) = ٨٠ × ٣٠

∴ أ ب + ٣٠ = ٦٠ ∴ أ ب = ٣٠ سم

∴ المسافة بين القوتين = ٣٠ سم

② ٤٠ = $ق_2$ - ٨٠

∴ $ق_2$ = ١٢٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة

، ٨٠ × ٣٠ = ١٢٠ × ب حـ

∴ ب حـ = ٢٠ سم ∴ أ ب = ١٠ سم

∴ المسافة بين القوتين = ١٠ سم

١٤

① ٣٥٠ = ٥٠٠ - $ق_2$

∴ $ق_2$ = ١٥٠ نيوتن

وتعمل فى عكس اتجاه المحصلة

، ٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ (أ ب + ٥١)

∴ ٥١٠ = ٣ أ ب + ١٥٣

∴ ٥١٠ - ١٥٣ = ٣ أ ب

∴ أ ب = $\frac{٣٥٧}{٣}$ = ١١٩ سم

∴ البُعد بين القوتين = ١١٩ سم

② ٣٥٠ = $ق_2$ - ٥٠٠

∴ $ق_2$ = ٨٥٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه المحصلة

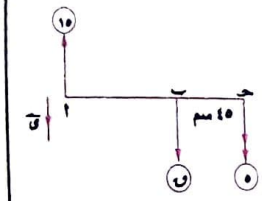
، ٨٥٠ × ب حـ

= ٥٠٠ × ٥١

∴ ب حـ = ٣٠ سم ∴ أ ب = ٢١ سم

∴ المسافة بين القوتين = ٢١ سم

١٥



٥ = ق - ١٥

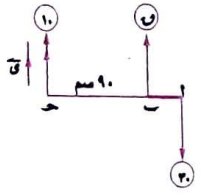
∴ ق = ٢٠ نيوتن

، ٢٠ × ٤٥

= ١٥ (أ ب + ٤٥)

∴ ٦٠ = أ ب + ٤٥ ∴ أ ب = ١٥ سم

١٦



ق - ٣٠ = ١٠

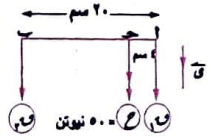
∴ ق = ٤٠ نيوتن

، ٣٠ (أ ب + ٩٠)

= ٤٠ × ٩٠

∴ أ ب + ٩٠ = ١٢٠ ∴ أ ب = ٣٠ سم

١٧



$ق_1$ + $ق_2$ = ٥٠ (١)

، $ق_1$ × ٤ = $ق_2$ × ١٦

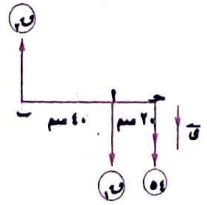
∴ $ق_1$ = ٤ $ق_2$

وبالتعويض فى (١) :

∴ ٤ $ق_2$ + $ق_2$ = ٥٠ ∴ ٥ $ق_2$ = ٥٠

∴ $ق_2$ = ١٠ نيوتن ، $ق_1$ = ٤٠ نيوتن

١٨



٥٤ = $ق_1$ - $ق_2$ (١)

، $ق_1$ × ٢٠ = $ق_2$ × ٦٠

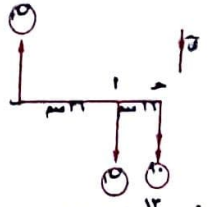
∴ $ق_1$ = ٣ $ق_2$

∴ ٥٤ = ٣ $ق_2$ - $ق_2$

∴ ٢ $ق_2$ = ٥٤

∴ $ق_2$ = ٢٧ ث جم ∴ $ق_1$ = ٨١ ث جم

١٩



٩٠ = ق$_{١}$ ف$_{١}$ − ق$_{٢}$ ف$_{٢}$ (١)

، ق$_{١}$ × ١٦ = ق$_{٢}$ × ٥٢

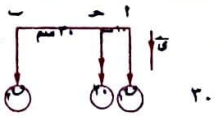
∴ ق$_{١}$ = $\frac{١٣}{٤}$ ق$_{٢}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٩٠ = $\frac{١٣}{٤}$ ق$_{٢}$ − ق$_{٢}$

∴ ٩٠ = $\frac{٩}{٤}$ ق$_{٢}$ ∴ ق$_{٢}$ = ٤٠ ث.كجم

∴ ق$_{١}$ = $\frac{١٣}{٤}$ × ٤٠ = ١٣٠ ث.كجم

٢٠



① ٢٠ = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ (١)

، ق$_{١}$ × ١٠ = ق$_{٢}$ × ٣٠

∴ ق$_{١}$ = ٣ ق$_{٢}$ وبالتعويض فى (١)

∴ ٣ ق$_{٢}$ + ق$_{٢}$ = ٢٠

∴ ق$_{٢}$ = ٥ نيوتن ، ق$_{١}$ = ١٥ نيوتن



② ٢٠ = ق$_{١}$ − ق$_{٢}$ (١)

، ق$_{١}$ × ١٠ = ق$_{٢}$ × ٥٠

∴ ق$_{١}$ = ٥ ق$_{٢}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

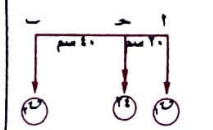
∴ ٢٠ = ٥ ق$_{٢}$ − ق$_{٢}$ ∴ ٢٠ = ٤ ق$_{٢}$

∴ ق$_{٢}$ = ٥ نيوتن ، ق$_{١}$ = ٢٥ نيوتن

٢١

يوجد حالتان :

• ح ∈ $\overline{أب}$:



ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ = ٢٤ (١)

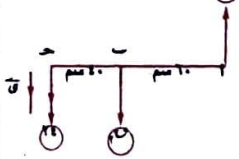
، ق$_{١}$ × ٢٠ = ق$_{٢}$ × ٤٠ ∴ ق$_{١}$ = ٢ ق$_{٢}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٢ ق$_{٢}$ + ق$_{٢}$ = ٢٤

∴ ٣ ق$_{٢}$ = ٢٤ ∴ ق$_{٢}$ = ٨ نيوتن

∴ ق$_{١}$ = ١٦ نيوتن

• ح ∉ $\overline{أب}$:



٢٤ = ق$_{٢}$ − ق$_{١}$ (٢)

، ق$_{١}$ × ١٠٠

= ق$_{٢}$ × ٤٠

∴ ق$_{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ ق$_{١}$

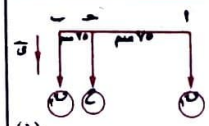
وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٢٤ = $\frac{٥}{٢}$ ق$_{١}$ − ق$_{١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ق$_{١}$

∴ ق$_{١}$ = ١٤ × $\frac{٢}{٣}$ = ١٦ نيوتن

، ق$_{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ × ١٦ = ٤٠ نيوتن

٢٢



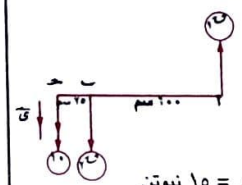
(١)

• القوتان فى اتجاه واحد :

ق$_{١}$ × ٧٥ = ق$_{٢}$ × ٢٥

∴ ق$_{٢}$ = ٣ ق$_{١}$

• القوتان فى اتجاهين متضادين :



∴ ق$_{٢}$ − ق$_{١}$ = ١٠

وبالتعويض من (١) :

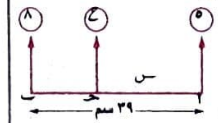
∴ ٣ ق$_{١}$ − ق$_{١}$ = ١٠

∴ ٢ ق$_{١}$ = ١٠

∴ ق$_{١}$ = ٥ نيوتن ، ق$_{٢}$ = ١٥ نيوتن

٢٣

أولًا : ح = ٥ + ٨ = ١٣ نيوتن



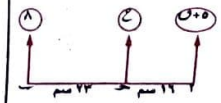
، ٥ × أح = ٨ × ب ح

٥ س = ٨ (٣٩ − س)

∴ ٥ س = ٣١٢ − ٨ س

∴ ١٣ س = ٣١٢ ∴ س = ٢٤ سم

ثانيًا : ∵ المحصلة تتحرك ٨ سم



∴ أح = ٢٤ − ٨

= ١٦ سم

، ح ب = ٢٣ سم

∴ (٥ + ق) (١٦) = ٨ × ٢٣

∴ ٨٠ + ١٦ ق = ١٨٤ ∴ ق = ٦,٥ نيوتن

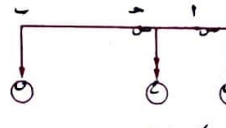
٢٤



• قبل التحرك :

ق × أح = ق × ب ح

∴ أح = ب ح



• بعد التحرك :

ق (س + أح − ص)

= ق (ب ح + ص)

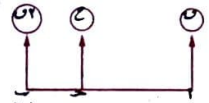
∴ س + أح − ص = ب ح + ص

∴ س − ص = ص ∴ س = ٢ ص

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س

∴ المحصلة تتحرك مسافة = $\frac{١}{٢}$ س

٢٥

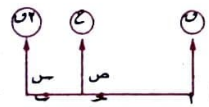


(١)

• قبل التحرك :

ق × أح = ٢ ق × ب ح

∴ أح = ٢ ب ح



(٢)

• بعد التحرك :

ق × (أح + ص) =

٢ ق × (ب ح − ص + س)

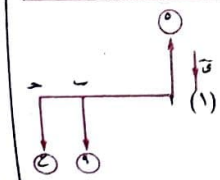
∴ أح + ص = ٢ ب ح − ٢ ص + ٢ س

من (١) ، (٢) ينتج أن :

٢ ب ح + ص = ٢ ب ح − ٢ ص + ٢ س

∴ ٣ ص = ٢ س ∴ ص = $\frac{٢}{٣}$ س

٢٦



(١)

• قبل التحرك :

٥ أح = ٩ ب ح

• بعد التحرك :

٥ (أح + ص)

= ٩ (ب ح − س + ص)

∴ ٥ أح + ٥ ص

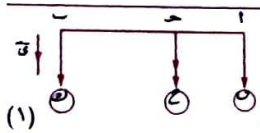
∴ ٩ ب ح − ٩ س + ٩ ص (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٥ ص = −٩ س + ٩ ص

∴ ٩ س = ٤ ص ∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ س

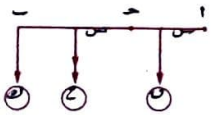
٢٧



(١)

• قبل التحرك :

ق × أح = ك ب ح



• بعد التحرك :

ق (أح − س + ص)

= ك (ب ح − ص)

∴ ق أح − ق س + ق ص = ك ب ح − ك ص (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ − ق س + ق ص = − ك ص

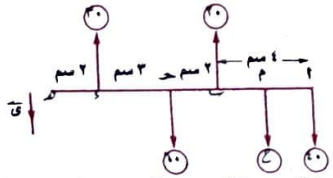
∴ (ق + ك) ص = ق س

∴ ص = $\frac{ق}{ق + ك}$ × س

ثانيًا تمارين على محصلة عدة قوى متوازية

بفرض أن المحصلة $\overrightarrow{ح}$ وتؤثر فى نقطة م

١



$\overrightarrow{ح}$ = ٤٠ ى + ٦٠ ى − ٢٠ ى − ٣٠ ى = ٥٠ ى

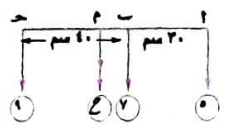
∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

∴ − ٢٠ × ٤ + ٦٠ × ٦ − ٣٠ × ٩ = ٥٠ × أم

∴ أ م = ٠,٢ سم

∴ نقطة تأثير المحصلة تبعد ٠,٢ سم عن أ

٢



ح = ٥ + ٧ + ٩

= ٢١ نيوتن

وتعمل فى اتجاه القوى

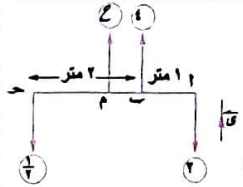
∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

∴ ٧ × ٣٠ + ٩ × ٧٠ = ٢١ × أ م

∴ ٢١٠ + ٦٣٠ = ٢١ أ م

∴ أ م = $\frac{٨٤٠}{٢١}$ = ٤٠ سم

٣



حـ = ٤ − ٢ − $\frac{١}{٢}$

= ١ $\frac{١}{٢}$ نيوتن

∵ مجموع عزوم القوى

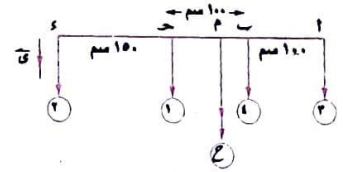
حول أ = عزم المحصلة حول أ

∴ −٤ × ١ + $\frac{١}{٢}$ × ٣ = ١ $\frac{١}{٢}$ × أ م

∴ أ م = $\frac{٥}{٢}$ م

∴ المحصلة تبعد $\frac{٥}{٢}$ م عن النقطة «أ»

٤



ح = ٣ + ٤ + ١ + ٢ = ١٠ ث.كجم

وتعمل فى اتجاه القوى الأربعة

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

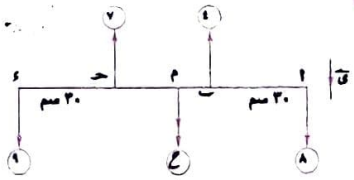
∴ ٤ × ١٠٠ + ١ × ٢٠٠ + ٢ × ٣٥٠ = ١٠ × أ م

١٣٠٠ = ١٠ أ م ∴ أ م = ١٣٠ سم

، م على اليسار من أ

∴ م ∈ $\overleftarrow{أ ء}$ ، أ م = ١٣٠ سم

٥



ح = ٨ − ٤ − ٧ + ٩ = ٦ ث.كجم

، وتعمل فى اتجاه القوتين ٨ ، ٩ ث.كجم

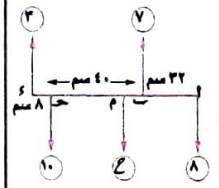
∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

∴ −٤ × ٣٠ − ٧ × ٦٠ + ٩ × ٩٠ = ٦ × أ م

∴ أ م = ٤٥ سم ، م على اليسار من أ

∴ م ∈ $\overleftarrow{أ ء}$ ، أ م = ٤٥ سم

٦



ح = ٨ + ١٠ − ٧ − ٣

= ٨ نيوتن

∵ مجموع عزوم

القوى حول أ

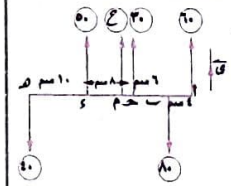
= عزم المحصلة حول أ

∴ −٧ × ٣٢ + ١٠ × ٧٢ − ٣ × ٨٠ = ٨ × أ م

∴ أ م = ٣٢ سم

∴ المحصلة تبعد ٣٢ سم عن النقطة «أ»

٧



ح = ٦٠ + ٣٠ + ٥٠

− ٨٠ − ٤٠

= ٢٠ ث.كجم

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

∴ −٤ × ٨٠ − ١٠ × ٣٠ + ١٨ × ٥٠ + ٢٨ × ٤٠

= − ٢٠ أ م

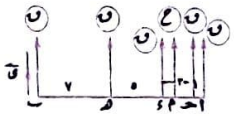
∴ ٢٤٠ = − ٢٠ أ م

∴ أ م = ١٢ سم وتقع على اليمين من «أ»

∴ م ∈ $\overrightarrow{أ ء}$ ، م ∉ $\overleftarrow{أ ء}$

∴ المحصلة تبعد ١٢ سم عن النقطة «أ» فى اتجاه $\overrightarrow{أ ء}$

٨



ح = ق + ق + ق

+ ق + ق = ٥ ق

∵ مجموع عزوم القوى حول أ

= عزم المحصلة حول أ

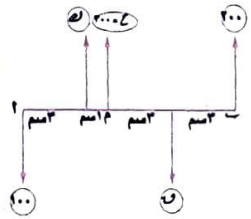
∴ − ق × ل − ق × ٤ ل − ق × ٩ ل − ق × ١٦ ل

= − ٥ ق × أ م

∴ − ٣٠ ل = − ٥ أ م ∴ أ م = ٦ ل

∴ $\frac{أ م}{أ ب}$ = $\frac{٦ ل}{١٦ ل}$ = $\frac{٣}{٨}$ ∴ $\frac{أ م}{م ب}$ = $\frac{٣}{٥}$

٩



∵ ح = ٣٠٠ نيوتن

∴ ق − ٢٠٠

+ ل − ١٠٠

= ٣٠٠

∴ ق + ل = ٢٠٠ (١)

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

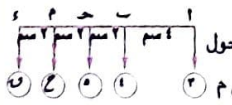
∴ ٢٠٠ × ١٠ − ق × ٧ + ل × ٣ = ٣٠٠ × ٤

∴ ٧ ق − ٣ ل = ٨٠٠ (٢)

من (١) : (٢) :

∴ ق = ٣٥٠ نيوتن ، ل = ٥٥٠ نيوتن

١٠



∵ مجموع عزوم القوى حول

م = عزم المحصلة حول م

، ∵ م ∈ خط عمل المحصلة

∴ ح$_م$ = صفر

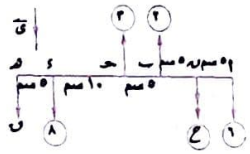
∴ −٣ × ٨ − ٤ × ٤ − ٥ × ٢ + ق × ٢ = صفر

∴ −٢٤ − ١٦ − ١٠ + ٢ ق = صفر

∴ ٢ ق = ٥٠ ∴ ق = ٢٥ ث.كجم

∴ ح = ٣ + ٤ + ٥ + ٢٥ = ٣٧ ث.كجم

١١



∵ مجموع عزوم القوى حول ء = عزم المحصلة حول ء

، ∵ ء ∈ خط عمل المحصلة

∴ ح$_ء$ = صفر

∴ −٦ × ٥ − ٢ × ٥ − ٣ × ١٠ + ٨ × ٢٠ + ق × ٢٥

= صفر

∴ −٣٠ − ١٠ − ٣٠ + ١٦٠ + ٢٥ ق = صفر

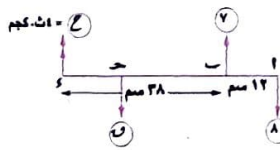
∴ ق = −٣,٦ نيوتن

∴ ق تعمل فى اتجاه القوتين ٢ ، ٣ نيوتن

، ح = ٦ − ٢ − ٣ + ٨ − ٣,٦ = ٥,٤ نيوتن وتعمل

فى اتجاه القوتين ٦ ، ٨ نيوتن

١٢



∵ −٤ = ٨ − ٧ + ق ∴ ق = −٥

∴ مقدار ق = ٥ ث.كجم

وتعمل فى اتجاه القوة ٧ ث.كجم

، ∵ مجموع عزوم القوى حول ء = عزم المحصلة حول ء

، ∵ ء ∈ خط عمل ح ∴ ح$_ء$ = صفر

∴ −٨ × ٥٠ + ٧ × ٣٨ + ٥ × حـ ء = ٠

∴ حـ ء = ٢٦,٨ سم

∴ حـ ب = ٣٨ − ٢٦,٨ = ١١,٢ سم

١٣

∵ $\vec{ق}_{م} = (٤ + ن)\vec{ت} - (٧ + ك)\vec{ع}$

، ∵ ٧ = ١٢ + ن − ٧ − ك

∴ ن − ك = ٢ (١)

، ∵ مجموع عزوم القوى حول ﻫ = عزم المحصلة حول ﻫ

، ﻫ ∈ خط عمل المحصلة. ∴ $ق_{م}$ = صفر

∴ −٧ × ٢ − ٤ × ١٠ + ن × ٦ − ك × ١٢ + ٨ × ١٥

= صفر

∴ −١٤٠ + ٦ ن − ١٢ ك + ١٢٠ = صفر

∴ ٦ ن − ١٢ ك = ٦٦ ∴ ن − ٢ ك = −١١ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ك = ١٣ نيوتن ، ن = ١٥ نيوتن

ثالثًا تمارين متنوعة

١

① (جـ)	② (ب)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (أ)	⑦ (أ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)			

٢

∵ $\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢}$

∴ $\vec{ق}_{١} = \vec{ح} - \vec{ق}_{٢}$

$= (-٣\vec{س} + ٤\vec{ص}) - (-٦\vec{س} + ٨\vec{ص}) = ٣\vec{س} - ٤\vec{ص}$

$\|\vec{ق}_{١}\| = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

$\vec{ق}_{٢} = -٦\vec{س} + ٨\vec{ص}$

$= -٢ (٣\vec{س} - ٤\vec{ص}) = -٢\vec{ق}_{١}$

∴ القوتان في اتجاهين متضادين

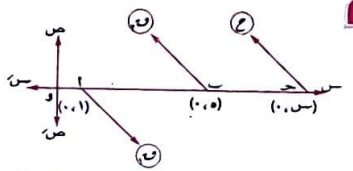
$\|\vec{ق}_{٢}\| = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ ، $\|\vec{ح}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

∴ $\vec{ق}_{١} \times (٣٠ + ب ح) = \vec{ق}_{٢} \times ب ح$

∴ ٥ × (٣٠ + ب ح) = ١٠ × ب ح

∴ ب ح = ٣٠ سم

٣



$\vec{ق}_{١} // \vec{ق}_{٢}$ ∴ $\vec{ق}_{١} \times \vec{ق}_{٢} = \vec{٠}$

∴ (٢ × ٣ + ا × ٦) $\vec{ع} = \vec{٠}$

∴ ٦ + ٦ ا = ٠ ∴ ا = −١

∴ $\vec{ق}_{٢} = -٣ (٢\vec{س} - \vec{ص}) = -٣\vec{ق}_{١}$

∴ القوتان في اتجاهين متضادين.

، $\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} = ٢\vec{س} - \vec{ص} + (-٦\vec{س}) + ٣\vec{ص}$

∴ $\vec{ح} = -٤\vec{س} + ٢\vec{ص}$

، $\|\vec{ح}\| = \sqrt{١٦ + ٤} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة قوة

، $ق_{١} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ وحدة قوة

، $ق_{٢} = \sqrt{٣٦ + ٩} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة قوة

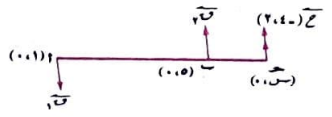
وبفرض $\vec{ح}$ تؤثر في نقطة حـ (س ، ٠)

∴ $\sqrt{٥}$ (س − ١) = ٣ $\sqrt{٥}$ (س − ٥)

∴ س = ٧

∴ نقطة تقاطع خط عمل $\vec{ح}$ مع و$\vec{س}$ هي النقطة حـ (٧ ، ٠)

حل آخر :



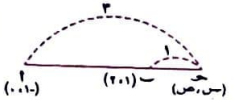
∵ $\vec{ق}_{١} // \vec{ق}_{٢}$ ∴ $\frac{ا}{٢} = \frac{٢}{-٦}$

∴ ا = −١ ، $\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢}$ ، ح (−٤ ، ٢)

∴ −٤ س = −٦ × ٥ + ٢ × ١ ∴ س = ٧

∴ حـ = (٧ ، ٠)

٤



$\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢}$

$= -٦\vec{س} + ٢\vec{ص}$

، ∵ $\vec{ق}_{١} = -٩\vec{س} + ٣\vec{ص}$

$= -٣ (٣\vec{س} - \vec{ص}) = -٣\vec{ق}_{١}$

∴ القوتان $\vec{ق}_{١}$ ، $\vec{ق}_{٢}$ متوازيتان ومتضادتين في الاتجاه

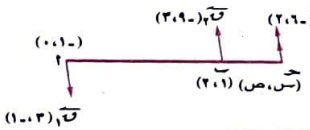
وبفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة حـ (س ، ص)

∴ حـ تقسم $\overline{ا ب}$ من الخارج بحيث $\frac{ا حـ}{ب حـ} = \frac{٣}{١}$

∴ س = $\frac{٣ \times ١ - ١ \times (-١)}{٣ - ١}$ = ٢

، ص = $\frac{٣ \times ٢ - ١ \times ٠}{٣ - ١}$ = ٣ ∴ حـ = (٢ ، ٣)

حل آخر :



∵ $\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} = (-٦ ، ٢)$

وتؤثر في نقطة (س ، ص)

∴ −٦ س = −٩ × ١ + ٣ × ١− ∴ س = ٢

، ٢ ص = ٣ × ٢ − ١ × صفر ∴ ص = ٣

∴ حـ = (٢ ، ٣)

٥

∵ $\vec{ق}_{١} \times \vec{ق}_{٢} = \vec{٠}$

∴ (−٢ × −٤ − ك × ٨) $\vec{ع} = \vec{٠}$

∴ ٨ − ٨ ك = ٠ ∴ ك = ١

∴ $\vec{ح} = \vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} = ٦\vec{س} - ٢\vec{ص}$

، نفرض أن نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع محور السينات (س ، ٠)

، ∵ مجموع عزمي $\vec{ق}_{١}$ ، $\vec{ق}_{٢}$ حول «د»

= عزم المحصلة حول «د»

∴ (−٢ × ١ − ٠ × −٢) $\vec{ع}$ + (٤ × −٤ − ٠ × ٨) $\vec{ع}$

= (س × −٣ − ٠ × ٦) $\vec{ع}$

∴ −٢ $\vec{ع}$ − ١٦ $\vec{ع}$ = −٣ س $\vec{ع}$

∴ −١٨ = −٣ س ∴ س = ٦

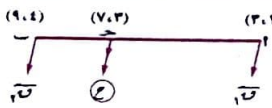
∴ نقطة تقاطع المحصلة مع محور السينات (٦ ، ٠)

∴ معادلة خط عمل المحصلة هي :

$\frac{ص - ٠}{س - ٦} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$ ∴ −٢ ص = س − ٦

∴ س + ٢ ص − ٦ = ٠

٦



∵ $\vec{ق}_{١} // \vec{ق}_{٢}$

∴ $\vec{ق}_{٢} = ك \vec{ق}_{١}$

∴ $\vec{ق}_{٢} = ك (٢\vec{س} - ٣\vec{ص})$

∴ $\vec{ق}_{٢} = (٢ ك ، -٣ ك)$

، ∵ $\vec{ح} = \vec{٠}$ ∴ حـ ا × $\vec{ق}_{١}$ + حـ ب × $\vec{ق}_{٢} = \vec{٠}$

∴ (−٢ ، −٤) × (٢ ، −٣) + (١ ، ٢)

× (٢ ك ، −٣ ك) = $\vec{٠}$

∴ ١٤ $\vec{ع}$ − ٧ ك $\vec{ع}$ = $\vec{٠}$

∴ ٧ ك = ١٤ ∴ ك = ٢

∴ $\vec{ق}_{٢} = ٤\vec{س} - ٦\vec{ص}$

٧

$ق_{١} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ نيوتن

، بفرض $\vec{ع}$ متجه وحدة في اتجاه $\vec{ق}_{١}$

$\therefore \vec{ى} = \frac{٦\vec{س} + ٨\vec{ص}}{١٠} = ٠,٦\vec{س} + ٠,٨\vec{ص}$

، $\because ح = ٥$ نيوتون $\therefore$ $ق_١$ ، $ق_٣$ متضادتا الاتجاه

$\therefore$ إما $ق_٣ < ق_١$ $\therefore ق_٣ = ١٠ - ٥ = ٥$ نيوتون

أ، $ق_٣ > ق_١$ $\therefore ق_٣ = ١٠ + ٥ = ١٥$ نيوتون

• فى حالة $ق_٣ = ٥$ نيوتون :



$\therefore \vec{ح}$ فى اتجاه $\vec{ق_١}$

$\therefore \vec{ح} = ٥\vec{ى} = ٣\vec{س} + ٤\vec{ص}$

، $\vec{ق_٣}$ فى عكس اتجاه $\vec{ق_١}$

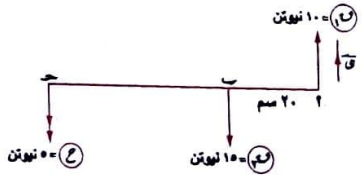
$\therefore \vec{ق_٣} = -٥\vec{ى} = -٣\vec{س} - ٤\vec{ص}$

، $١٠ \times أ حـ = ٥ \times (٢٠ + أ حـ)$

$\therefore ١٠ أ حـ = ١٠٠ + ٥ أ حـ$

$\therefore ٥ أ حـ = ١٠٠$ $\therefore أ حـ = ٢٠$ سم

• فى حالة $ق_٣ = ١٥$ نيوتون :



$\therefore \vec{ح}$ فى عكس اتجاه $\vec{ق_١}$

$\therefore \vec{ح} = -٥\vec{ى} = -٣\vec{س} - ٤\vec{ص}$:

، $\vec{ق_٣}$ فى عكس اتجاه $\vec{ق_١}$

$\therefore \vec{ق_٣} = -١٥\vec{ى} = -٩\vec{س} - ١٢\vec{ص}$

، $١٠ \times (٢٠ + ب حـ) = ١٥ \times ب حـ$

$\therefore ٢٠٠ + ١٠ ب حـ = ١٥ ب حـ$

$\therefore ٥ ب حـ = ٢٠٠$ $\therefore ب حـ = ٤٠$ سم

$\therefore أ حـ = ٦٠$ سم

٨

$\vec{ح} = (-٢ + ١ + ٥)\vec{س} + (٦ - ٣ - ١٥)\vec{ص}$

$= ٤\vec{س} - ١٢\vec{ص}$

وبفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م (س ، ص)

، $\because$ مجموع عزوم القوى حول و = عزم المحصلة حول و

$\therefore \vec{وأ} \times \vec{ق_١} + \vec{وب} \times \vec{ق_٢} + \vec{وحـ} \times \vec{ق_٣} = \vec{وم} \times \vec{ح}$

$\therefore (٢ \times ٦ + ٣ \times ٢)\vec{ع} + (-٣ \times -٣ - ١ \times ١)\vec{ع}$

$+ (-١ \times -١٥ - ٢ \times ٥)\vec{ع}$

$= (س \times -١٢ - ص \times ٤)\vec{ع}$

$\therefore ١٨ + ٨ + ٥ = -١٢ س - ٤ ص$

$\therefore$ معادلة خط عمل المحصلة :

$١٢ س + ٤ ص + ٣١ = ٠$

حل آخر :

$\because \vec{ق_١} = (-٢ ، ٦)$ تؤثر فى أ $(٢ ، ٣)$

، $\vec{ق_٢} = (١ ، -٣)$ تؤثر فى ب $(-٣ ، ١)$

، $\vec{ق_٣} = (٥ ، -١٥)$ تؤثر فى حـ $(-١ ، ٢)$

$\therefore \vec{ح} = (٤ ، -١٢)$ وتؤثر فى ء $(س ، ص)$

$\therefore ٤ س = -٢ \times ٢ + ١ \times -٣ + ٥ \times -١$

$\therefore س = -٣$

، $-١٢ ص = ٦ \times ٣ - ٣ \times ١ - ١٥ \times ٢$

$\therefore ص = \frac{٥}{٤}$

$\therefore \vec{ح}$ تمر بالنقطة $(-٣ ، \frac{٥}{٤})$

$\therefore$ معادلة خط عمل المحصلة هى $\frac{ص - \frac{٥}{٤}}{س + ٣} = \frac{-١٢}{٤}$

أى أن: $١٢ س + ٤ ص + ٣١ = ٠$

٩

$\because \vec{ق_١} // \vec{ق_٢} // \vec{ق_٣}$ $\therefore \frac{م}{١} = \frac{-١٥}{٣} = \frac{١٠}{ن}$

$\therefore م = -٥$ ، $ن = -٢$ $\therefore \vec{ق_١} = \vec{س} - ٥\vec{ص}$

، $\vec{ق_٣} = -٢\vec{س} + ١٠\vec{ص}$

$\therefore \vec{ح} = (١ + ٣ - ٢)\vec{س} + (-٥ - ١٥ + ١٠)\vec{ص}$

$= ٢\vec{س} - ١٠\vec{ص}$

وبفرض خط عمل المحصلة يمر بالنقطة ء (س ، ص)

، $\because$ مجموع عزوم القوى حول و = عزم المحصلة حول و

$\therefore \vec{وأ} \times \vec{ق_١} + \vec{وب} \times \vec{ق_٢} + \vec{وحـ} \times \vec{ق_٣} = \vec{وء} \times \vec{ح}$

$\therefore (٣ \times -٥ - ١ \times ١)\vec{ع} + (٣ \times -١٥ - ٣ \times ٠)\vec{ع}$

$+ (٣ \times ١٠ \times ٥ \times ٢)\vec{ع} = (-١٠ س - ٢ ص)\vec{ع}$

$\therefore -١٦ - ٤٥ + ٤٠ = -١٠ س - ٢ ص$

$\therefore$ معادلة خط عمل المحصلة :

$١٠ س + ٢ ص - ٢١ = ٠$

١٠

$س = \frac{ق_١ س_١ + ق_٢ س_٢ + ق_٣ س_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣}$

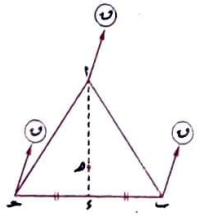
$= \frac{٥ \times ٢ + ٨ \times ٠ + ١٢ \times ٤}{٥ + ٨ + ١٢} = \frac{٥٨}{٢٥}$

$ص = \frac{ق_١ ص_١ + ق_٢ ص_٢ + ق_٣ ص_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣}$

$= \frac{٥ \times -٢ + ٨ \times ٣ + ١٢ \times -١}{٥ + ٨ + ١٢} = \frac{٢}{٢٥}$

$\therefore$ نقطة تأثير محصلة القوى $= (\frac{٥٨}{٢٥} ، \frac{٢}{٢٥})$

١١



محصلة القوتين ق ، ق

المؤثرتين عند ب ، حـ :

$\vec{ح_١} = ٢$ ق وتؤثر فى

منتصف $\overline{ب حـ}$ (نقطة ء)

، محصلة القوتين ق ، ٢ ق المؤثرتين عند أ ، ء :

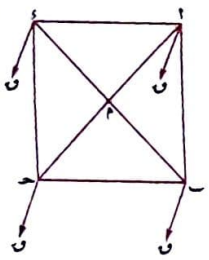
$\vec{ح_٢} = ٢ ق + ق = ٣ ق$ وتؤثر فى نقطة د

$\therefore ق \times أ د = ٢ ق \times ء د$ $\therefore \frac{أ د}{ء د} = \frac{٢}{١}$

$\therefore$ النقطة «د» هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

أى أن: المحصلة تؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

١٢



• محصلة القوتين ق

، ق المؤثرتين عند أ ، حـ :

$\vec{ح_١} = ٢$ ق وتؤثر فى

منتصف $\overline{أ حـ}$ (نقطة م)

• محصلة القوتين ق

، ق المؤثرتين فى ب ، ء :

$\vec{ح_٢} = ٢$ ق وتؤثر فى منتصف $\overline{ب ء}$ (وهى نقطة م)

$\therefore$ محصلة القوى الأربعة $\vec{ح} = \vec{ح_١} + \vec{ح_٢}$

$= ٤$ ق وتؤثر فى م

أى أن: المحصلة تمر بنقطة تقاطع قطرى المربع.

١٣ ① **أولًا :** (د) **ثانيًا :** (جـ)

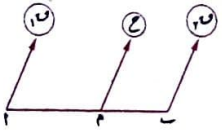
ثالثًا : (د) **رابعًا :** (د)

② (أ)

إرشادات لحل رقم ١٣ :

① **أولًا :** $\because ح < ق_٣ < ق_١$

$\therefore$ القوتان متحدتا الاتجاه



$\therefore ح = ق_١ + ق_٣$

، $\because ق_٣ < ق_١$

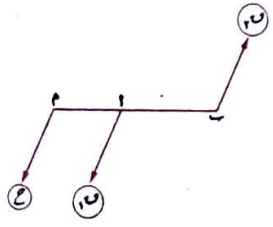
$\therefore ح < ق_١ + ق_١$

$\therefore ح < ٢ ق_١$

، $\frac{ق_٣}{ق_١} = \frac{أ م}{ب م}$

$\therefore$ جميع الاجابات صحيحة ماعدا (د)

ثانيًا :



∵ $ق_1 > ق_2 > ق_3$ ∴ القوتان متضادتان

∴ $ح = ق_1 - ق_3$

أى أن: $ق_1 = ح + ق_3$ ، $أ ب = ب م - أ م$

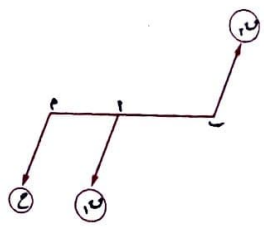
، ∵ ح أقرب للقوة الأكبر ($ق_1$)

∴ $أ م < ب م$

ولكن ليس من الضرورى أن يكون $ق_1 < 2 ق_3$

∴ جميع الإجابات صحيحة ماعدا (جـ)

ثالثًا :



∵ $ق_1 > ق_3$ ، $ق_3 = ح$

∴ $ق_1 > ح$

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ فى اتجاه متضادين

، ∵ $ح = ق_1 - ق_3$ ∴ $ق_1 - ق_3 = ق_3$

∴ $ق_1 = 2 ق_3$ ∴ $ق_3 = ح = \frac{1}{2} ق_1$

، ∵ $ق_1 \times أ م = ق_3 \times ب م$

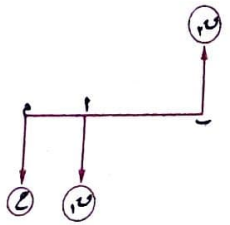
∴ $ق_1 \times أ م = \frac{1}{2} ق_1 \times ب م$

∴ $أ م = \frac{1}{2} ب م$ ∴ $ب م = 2 أ م$

∴ $أ ب + أ م = 2 أ م$ ∴ $أ ب = أ م$

∴ جميع الإجابات صحيحة ماعدا (د)

رابعًا :



∵ $ق_1 > ح > ق_3$ ∴ $ق_1 > ق_3$

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ فى اتجاه متضادين

، $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد

∴ $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين

، $ح = ق_1 - ق_3$ ∴ $ق_1 - ق_3 < ق_3$

∴ $ق_1 < 2 ق_3$ ، $م \in \overleftrightarrow{أ ب}$

∴ جميع الإجابات صحيحة ماعدا (د)

② ∵ $ق \in [10 ، 20]$

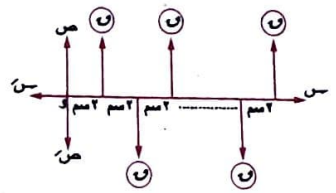
∴ عند $ق = 10$ ∴ $\frac{10}{15} = \frac{40}{س}$

∴ $س = 60$ سم ، عند $ق = 20$

∴ $\frac{20}{15} = \frac{40}{س}$ ∴ $س = 30$ سم

∴ $س \in [30 ، 60]$

١٤



∵ عدد القوى = ن عددًا فرديًا

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1 ص} - \overrightarrow{ق_2 ص} + \overrightarrow{ق_3 ص}$

$- + \overrightarrow{ق_ن ص}$

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_ن ص}$

، ∵ نقطة تأثير المحصلة تبعد عن و بمقدار

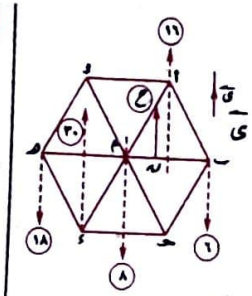
$= \frac{ن + 1}{2} \times 2 = ن + 1$ سم

، ∵ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة الأصل و

= عزم المحصلة حول و = ق × (ن + ١)

= (ن + ١) × ق وحدة عزم

١٥



$ح = -٦ ى + ١٦ ى$

$- ٨ ى + ٣٠ ى - ١٨ ى$

$= ١٤ ى$

، نفرض أن المحصلة تؤثر عند نقطة $ن \in \overline{ب د}$

∴ $ج_م = -٦ \times ل + ١٦ \times \frac{1}{2} ل$

$- ٣٠ \times \frac{1}{2} ل + ١٨ \times ل = ٥ ل$

∴ ن تقع على اليمين من م ، $٥ ل = ١٤ م ن$

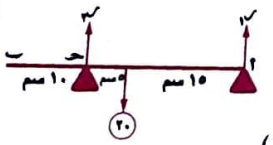
∴ $م ن = \frac{٥}{١٤} ل$ ، $ن \in \overline{م ب}$

إجابات تمارين 6

١

① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)

٢



من شروط الاتزان

∴ $ق_1 + ق_2$

$= ٢٠$ (١)

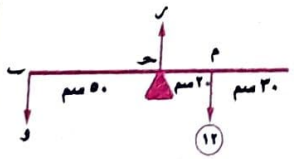
، $ج_م$ = صفر

∴ $٢٠ \times ١٥ - ق_2 \times ٢٠$ = صفر

∴ $ق_2 = \frac{٣٠٠}{٢٠} = ١٥$ نيوتن

، من (١) : ∴ $ق_1 = ٥$ نيوتن

٣



∵ الجسم متزن تحت ا

تأثير ثلاث قوى

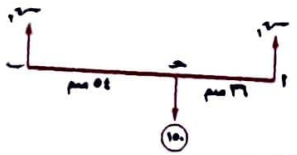
∴ $ق = ١٢ + و$ (١)

، $١٢ \times ٢٠ = و \times ٥٠$

∴ $و = \frac{٢٤٠}{٥٠} = ٤,٨$ ث.كجم

، من (١) : ∴ $ق = ١٢ + ٤,٨ = ١٦,٨$ ث.كجم

٤



من شروط الاتزان :

∴ $ق_1 + ق_2 = ١٥٠$ (١)

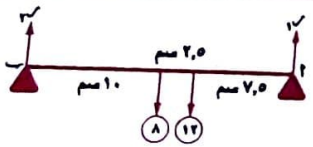
، $ج_م$ = صفر

∴ $١٥٠ \times ٣٦ - ق_2 \times ٩٠$ = صفر

∴ $ق_2 = \frac{١٥٠ \times ٣٦}{٩٠} = ٦٠$ ث.جم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ق_1 = ٩٠$ ث.جم

٥



من شروط التوازن :

∴ $ق_1 + ق_2 = ٢٠$ (١)

، $ج_م$ = صفر

∴ $١٢ \times ٧\frac{1}{2} + ٨ \times ١٠ - ق_2 \times ٢٠$ = صفر

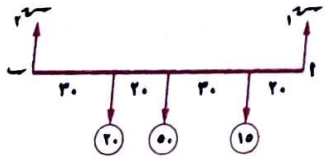
∴ $ق_2 = \frac{٨٠ + ٩٠}{٢٠}$

، بالتعويض فى (١) : ∴ $ق_2 = ٨ \frac{1}{2}$ ث.كجم

∴ $ق_1 = ٢٠ - ٨ \frac{1}{2} = ١١ \frac{1}{2}$ ث.كجم

∴ ض$_1$ = $١١ \frac{1}{2}$ ث.كجم ، ض$_2$ = $٨ \frac{1}{2}$ ث.كج

٦



من شروط الاتزان :

∴ $ق_1 + ق_2 = ٨٥$

، $ج_م$ = صفر

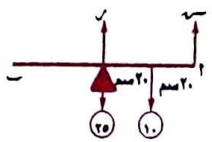
∴ $١٥ \times ٢٠ + ٥٠ \times ٥٠ + ٢٠ \times ٧٠ - ق_2 \times$

= صفر

∴ $س_2 = \frac{٣٠٠ + ٢٥٠٠ + ١٤٠٠}{١٠٠} = ٤٢$ نيوتن

وبالتعويض فى (١) : ∴ $س_1 = ٨٥ - ٤٢ = ٤٣$ نيوتن

٧



من شروط التوازن :

∴ $س_2 + ر$

$= ١٠ + ٢٥ = ٣٥$

، $ج_1 =$ صفر

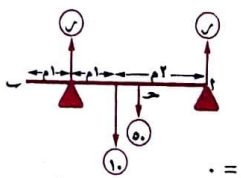
∴ $١٠ \times ٢٠ + ٢٥ \times ٤٠ - ر \times ٤٠ =$ صفر

∴ $٢٠٠ + ١٠٠٠ = ٤٠ ر$

∴ $ر = \frac{١٠٠٠ + ٢٠٠}{٤٠}$

∴ $ر = ٣٠$ نيوتن ، $س_2 = ٣٥ - ٣٠ = ٥$ نيوتن

٨



∵ اللوح متزن

∴ $٢ ر = ٥٠ + ١٠$

∴ $ر = ٣٠$ كجم ، $ج_1 = ٠$

$٥٠ \times أ حـ + ١٠ \times ٢ - ٣٠ \times ٣ = ٠$

∴ $٥٠ أ حـ = ٧٠$ ∴ $أ حـ = ١,٤$م

أى أن : الطفل يقف على بعد ١,٤ م من الطرف «أ» لكى يتساوى ردا الفعل على الحاملين.

٩

من شروط الاتزان :

∴ $س_1 + س_2 = ١٣$ (١)

، $ج_1 =$ صفر

∴ ٤٠×٥

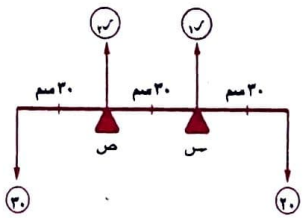
$+ ٨ \times ٨٠$

$- س_2 \times ١٢٠ =$ صفر

∴ $س_2 = \frac{٦٤٠ + ٢٠٠}{١٢٠}$ ∴ $س_2 = ٧$ نيوتن

، من (١) : ∴ $س_1 = ٦$ نيوتن

١٠



من شروط الاتزان :

∴ $ر_1 + ر_2 = ٥٠$ (١)

، $ج_س = ٠$

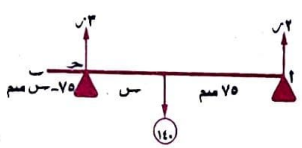
∴ $-٢٠ \times ٣٠ - ر_2 \times ٣٠ + ٦٠ \times ٣٠ = ٠$

∴ $ر_2 = ٤٠$ نيوتن ومن (١) ∴ $ر_1 = ١٠$ نيوتن

∴ الضغط عند س = ١٠ نيوتن

، الضغط عند ص = ٤٠ نيوتن

١١



∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ $٢ ر + ٣ ر = ١٤٠$ ∴ $٥ ر = ١٤٠$

∴ $ر = ٢٨$

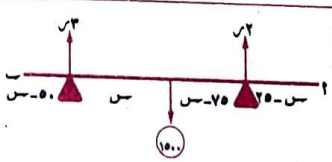
∴ رد الفعل عند ا = $٢ ر = ٥٦$ نيوتن

، رد الفعل عند حـ = $٣ ر = ٨٤$ نيوتن

، $٢ م_2 \times ٧٥ = ٣ م_1 \times س$ ∴ $س = ٥٠$ سم

∴ حـ تبعد عن الطرف ب مسافة $٧٥ - ٥٠ = ٢٥$ سم

١٢



∵ الساق متزنة تحت تأثير ثلاث قوى

∴ $٢ م_2 (٧٥ - س) = ٣ م_1 (س)$

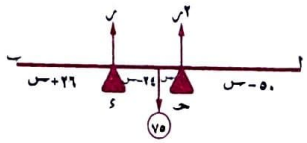
∴ $١٥٠ - ٢ س = ٣ س$ ∴ $٥ س = ١٥٠$

∴ $س = ٣٠$ سم

∴ الحامل ذو رد الفعل الأصغر يبعد عن الطرف القريب منه ٥ سم

، الحامل ذو رد الفعل الأكبر يبعد عن الطرف القريب منه ٢٠ سم

١٣



∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ $٢ ر \times س = ر (٢٤ - س)$

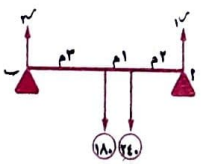
∴ $٢ س = ٢٤ - س$

∴ $٣ س = ٢٤$ ∴ $س = ٨$ سم

∴ الحامل ذو رد الفعل ٢ ر يبعد ٤٢ سم عن طرف القضيب

، الحامل ذو رد الفعل ر يبعد ٣٤ سم عن الطرف الآخر.

١٤



و $= ٦ \times ٣٠$

$= ١٨٠$ ث.كجم

∵ السقالة متزنة

∴ $ر_1 + ر_2 = ٤٢٠$ ث.كجم (١)

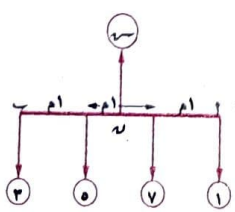
، $ج_1 = ٠$

$٢٤٠ \times ٢ + ١٨٠ \times ٣ - ر_2 \times ٦ = ٠$

∴ $ر_2 = ١٧٠$ كجم ومن (١) : $ر_1 = ٢٥٠$ ث.كجم

∴ $ض_2 = ١٧٠$ كجم ، $ض_1 = ٢٥٠$ ث.كجم

١٥



∵ القضيب متزن

∴ $س_2 = ١ + ٧ + ٥ + ٣$

∴ $س_2 = ١٦$ نيوتن

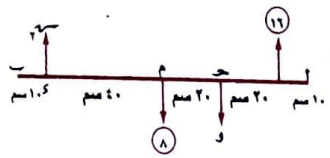
، $ج_1 =$ صفر

∴ $٧ \times ١ + ٥ \times ٢ + ٣ \times ٣ - س_2 \times أ ن =$ صفر

∴ $١٦ \times أ ن = ٢٦$ ∴ $أ ن = \frac{٥}{٨}$م

أى أن : نقطة التعليق على بعد $\frac{٥}{٨}$م من «أ»

١٦



من شروط الاتزان :

∴ $١٦ + س_2 = و + ٨$ ∴ $س_2 = و - ٨$ (١)

، $ج_1 =$ صفر

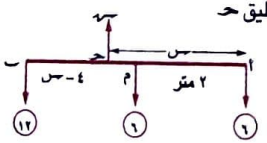
∴ $١٦ \times ٨٠ - و \times ٦٠ - ٨ \times ٤٠ =$ صفر

∴ و = ١٦ ث.كجم

، من (١) : ∴ $س_2 = ١٦ - ٨ = ٨$ ث.كجم

١٧

نفرض أن نقطة التعليق حـ



من شروط الاتزان :

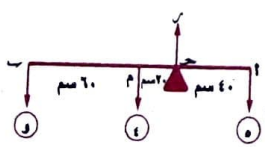
$س_2 = ٢٤$

، $ج_1 =$ صفر

∴ $٦ \times ٢ + ١٢ \times ٤ - ٢٤ \times س =$ صفر

∴ $س = ٢,٥$ متر من ا

١٨



من شروط الاتزان :

∴ $ر = ٩ + و$ (١)

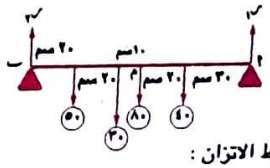
، $ج_حـ =$ صفر

∴ $و \times ٨٠ + ٤ \times ٢٠ - ٥ \times ٤٠ =$ صفر

∴ و = ١,٥ ث.كجم

، من (١) : ∴ $ر = ١٠\frac{١}{٢}$ ث.كجم

١٩



من شروط الاتزان :

∴ ر١ + ر٢ = ٢٠٠ (١)

، جم = صفر

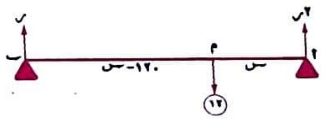
∴ ٤٠ × ٣٠ + ٥٠ × ٨٠ + ٦٠ × ٣٠ + ٥٠ × ر٣ − ٨٠ × ١٠٠ = صفر

∴ ر٣ = ١١٠ ث.جم

وبالتعويض فى (١) : ∴ ر١ = ٩٠ ث.جم

∴ ضر١ = ٩٠ ث.جم ، ضر٢ = ١١٠ ث.جم

٢٠



∵ الساق متزنة تحت تأثير ثلاث قوى

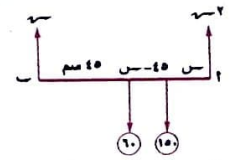
∴ ٢ ر س = ر (١٢٠ − س)

∴ ٢ س = ١٢٠ − س

∴ ٣ س = ١٢٠ ∴ س = ٤٠ سم

∴ يتم تعليق الثقل على مسافة ٤٠ سم من أحد الطرفين.

٢١



∵ القضيب متزن ∴ ٣ ر٣ = ١٥٠ + ٦٠

∴ ر٣ = ٧٠ ، جم = صفر

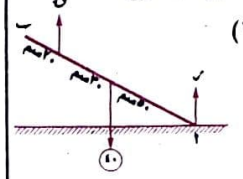
∴ ١٥٠ × س + ٦٠ × ٤٥ − ٧٠ × ٩٠ = .

∴ ١٥٠ س = ٣٦٠٠ ∴ س = ٢٤ سم

∴ يتم تعليق الثقل على بعد ٢٤ سم من الطرف «ا»

٢٢

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى



∴ ر + و = ٤٠ (١)

، ر × ٥٠ = و × ٣٠

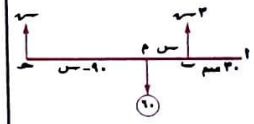
∴ ر = $\frac{٣}{٥}$ و

وبالتعويض فى (١) :

∴ $\frac{٣}{٥}$ و + و = ٤٠

∴ و = $\frac{٤٠ \times ٥}{٨}$ = ٢٥ ث.كجم ∴ ر = ١٥ ث.كجم

٢٣



من شروط الاتزان :

∴ ٤ ر٣ = ٦٠

∴ ر٣ = ١٥ نيوتن

∴ عند ب : الشد = ٤٥ نيوتن

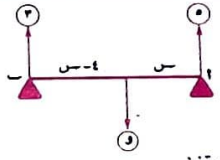
، عند حـ الشد = ١٥ نيوتن ، جحـ = صفر

∴ ٦٠ س − ١٥ × ٩٠ = صفر

∴ س = ٢٢$\frac{١}{٢}$ سم

∴ وزن القضيب يؤثر عند م حيث ا م = ٥٢,٥ سم

٢٤



∵ القضيب متزن

∴ ٥ × س = ٣ × (٤ − س)

∴ ٥ س = ١٢ − ٣ س ∴ س = ١,٥م

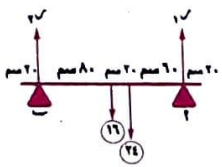
∴ و تبعد عن ا بمقدار ١,٥ م

وإذا اتزن القضيب على حامل واحد لابد وأن يوضع عند نقطة تأثير «و»

أى أن : الحامل يبعد ١,٥م عن النقطة «ا»

٢٥

أولًا :



ر١ + ر٢ = ٢٤ + ١٦

ر١ + ر٢ = ٤٠ (١)

، جم = صفر

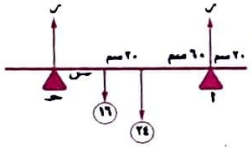
∴ ٢٤ × ٦٠ + ١٦ × ٨٠ − ر٢ × ١٦٠ = صفر

∴ ر٢ = ١٧ ث.كجم

ومن (١) : ∴ ر١ = ٢٣ ث.كجم

∴ ضر٢ = ١٧ ث.كجم ، ضر١ = ٢٣ ث.كجم

ثانيًا :



ر + ر = ٢٤ + ١٦

∴ ر = ٢٠ ث.كجم

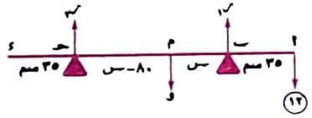
، جم = .

∴ ٢٤ × ٦٠ + ١٦ × ٨٠ − ٢٠ × (٨٠ + س) = .

∴ ٨٠ + س = ١٣٦ ∴ س = ٥٦ سم

أى أن : كتف الرجل على بعد ١٣٦ سم من «ا»

٢٦

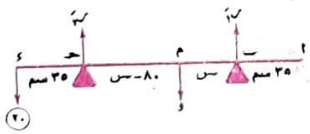


عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول ب فإن ر٢ = صفر

، من شروط الاتزان :

∴ جب = صفر ∴ − ١٢ × ٣٥ + و س = صفر

∴ و س = ٤٢٠ (١)



عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ فإن رَ١ = صفر

، من شروط الاتزان :

∴ جحـ = صفر

∴ − و (٨٠ − س) + ٢٠ × ٣٥ = صفر

∴ − ٨٠ و + و س + ٧٠٠ = صفر

وبالتعويض من (١) :

∴ − ٨٠ و + ٤٢٠ + ٧٠٠ = صفر

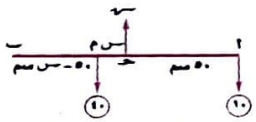
∴ و = ١٤ ث.كجم.

، من (١) : ∵ س = ٣٠ سم

∴ وزن القضيب = ١٤ ث.كجم ويعمل على بعد ٦٥ سم من ا

٢٧

● الحالة الأولى :

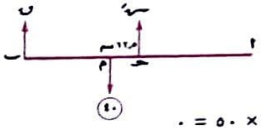


∵ القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى

∴ ١٠ × ٥٠ = ٤٠ س ∴ س = ١٢,٥ سم

∴ نقطة تأثير الوزن تبعد ٦٢,٥ سم عن ا

● الحالة الثانية :



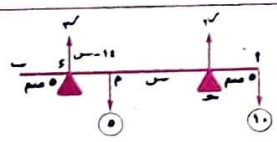
من شروط الاتزان : ا

∴ جحـ = .

∴ ٤٠ × ١٢,٥ − و × ٥٠ = .

∴ و = ١٠ نيوتن

٢٨



● الحالة الأولى :

∵ القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ ر٢ = صفر

من شروط الاتزان :

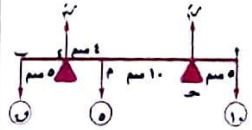
∴ جحـ = صفر ∴ ٥ س − ١٠ × ٥ = صفر

∴ س = ١٠ سم ∴ وزن القضيب يؤثر عند م

حيث أ م = ١٥ سم

• **الحالة الثانية :**

نفرض أكبر ثقل يعلق من ب هو و



∵ القضيب على وشك الدوران حول ء

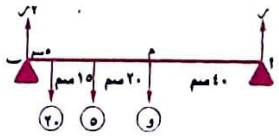
∴ ر'ء = صفر ، ومن شروط التوازن

∴ جء = صفر

∴ و × ٥ − ٥ × ٤ − ١٠ × ١٩ = صفر

∴ و = ٤٢ ث.كجم

٢٩



من شروط الاتزان :

∴ ٣ ر = ٢٥ + و (١)

، جم = صفر

∴ ر × ٤٠ + ٥ × ٢٠ + ٢٠ × ٣٥ − ٢ ر × ٤٠ = صفر

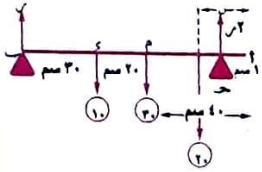
∴ ر = ٢٠

، من (١) ∴ و = ٣٥ نيوتن

، رد الفعل عند أ = ٢٠ نيوتن ، عند ب = ٤٠ نيوتن

٣٠

من شروط الاتزان :



∴ ٣ ر = ٦٠

∴ ر = ٢٠ نيوتن

، جم = صفر

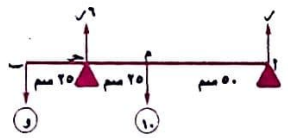
∴ −٤٠ × ١٠ + ٤٠ × ٣٠ + ٢٠ × س

+ ١٠ × ٦٠ − ٢٠ × ٩٠ = صفر

∴ س = ٢٠ سم

∴ الثقل يعلق على بعد ٢٠ سم من أ

٣١



من شروط الاتزان :

٧ ر = ١٠ + و (١)

، جب = صفر

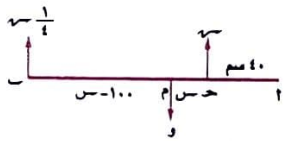
∴ ر × ١٠٠ − ١٠ × ٥٠ + ٦ ر × ٢٥ = صفر

∴ ٢٥٠ ر = ٥٠٠ ∴ ر = ٢ نيوتن

∴ رد الفعل عند أ = ٢ نيوتن ، عند حـ = ١٢ نيوتن

، من (١) : ∴ و = ٤ نيوتن

٣٢



من شروط الاتزان :

∴ جم = صفر

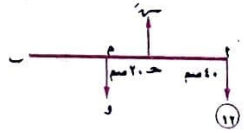
∴ سـ × س − ١/٤ سـ (١٠٠ − س) = صفر

∴ س − ٢٥ + ١/٤ س = صفر

∴ ٥/٤ س = ٢٥

∴ س = ٤/٥ × ٢٥ = ٢٠ سم

∴ نقطة تأثير الوزن على بعد ٦٠ سم من أ



عندما يكون التوازن على وشك أن يختل يكون الشد فى الخيط عند ب يساوى صفر

∴ جحـ = صفر

∴ − ١٢ × ٤٠ + و × ٢٠ = صفر

∴ و = ٢٤ نيوتن

٣٣

من شروط الاتزان :

∴ ر١ + ر٢ = ٢٠

، جحـ = صفر

∴ ٢٠ × ٢٠ − ر٢ × ٥٠ = صفر

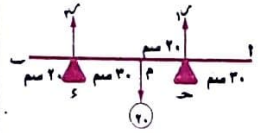
∴ ر٢ = ٨ نيوتن

، من (١) : ∴ ر١ = ١٢ نيوتن

∴ ض حـ = ١٢ نيوتن ، ض ء = ٨ نيوتن

عند تعليق ثقل عند ب يجعل القضيب على وشك الدوران

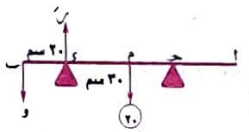
(١)



∴ ر حـ = صفر

، من شروط الاتزان :

∴ ر' = ٢٠ + و (٢)

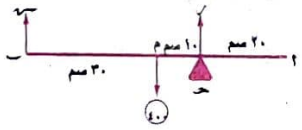


∴ جء = صفر

∴ − ٢٠ × ٣٠ + و × ٢٠ = صفر

∴ و = ٣٠ نيوتن ، من (٢) ∴ ر' = ٥٠ نيوتن

٣٤



من شروط الاتزان : ∴ ر + سـ = ٤٠٠ (١)

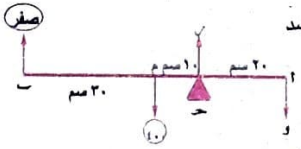
، جحـ = صفر

∴ ٤٠٠ × ١٠ − سـ × ٤٠ = صفر

∴ سـ = ١٠٠ ث.جم

، من (١) : ∴ ر = ٣٠٠ ث.جم

عندما يكون الشد عند ب على وشك الانعدام



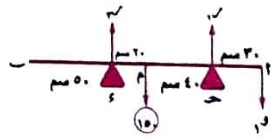
∴ جحـ = صفر

∴ − و × ٢٠ + ٤٠٠ × ١٠ = صفر

∴ و = ٢٠٠ ث.جم

٣٥

• عند تعليق الثقل و١ من أ يكون القضيب على وشك الدوران حول حـ ، ر٢ = صفر ∴ جحـ = صفر



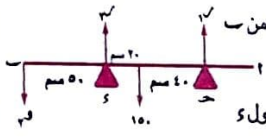
∴ − و١ × ٣٠ + ١٥٠ × ٤٠ = صفر

∴ و١ = ٢٠٠ ث.جم

، ر١ = ٢٠٠ + ١٥٠ = ٣٥٠ ث.جم

∴ ض١ = ٣٥٠ ث.جم

• عند تعليق الثقل و٢ من ب فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ء



، ر'١ = صفر ، جء = صفر

∴ − ١٥٠ × ٢٠ + و٢ × ٥٠ = صفر

∴ و٢ = ٦٠ ث.جم

، ر'٢ = ١٥٠ + ٦٠ = ٢١٠ ث.جم

∴ ض٢ = ٢١٠ ث.جم

٣٦



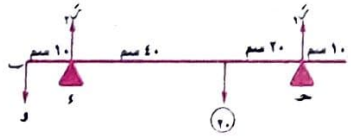
• عند تعليق الثقل ٤٠ ث.كجم من أ :

ر٢ = صفر ، جحـ = صفر

∴ ٢٠ × س = ٤٠ × ١٠ ∴ س = ٢٠ سم

∴ بعد نقطة تأثير الوزن عن أ = ٣٠ سم

• عند تعليق ثقل (و) من ب :



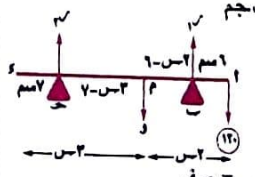
∴ ق$_{ح}$ = صفر ∴ ٢٠ × ٤٠ = و × ١٠

∴ و = ٨٠ ث.كجم

∴ أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب = ٨٠ ث.كجم

٣٧

عند تعليق ثقل ١٢٠ ث.جم من أ يكون القضيب على وشك الدوران حول ب



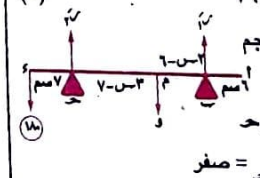
∴ ق$_{ء}$ = صفر ، ق$_{ح}$ = صفر

∴ و (٢ س − ٦) − ١٢٠ × ٦ = صفر

∴ و (٢ س − ٦) = ١٢٠ × ٦

∴ و (س − ٣) = ٣٦٠ (١)

عند تعليق ثقل ١٨٠ ث.جم من ء يكون القضيب على وشك الدوران حول ح



∴ ر$_{١}$ = صفر ، ق$_{ح}$ = صفر

∴ ١٨٠ × ٧ − و (٣ س − ٧) = صفر

∴ و (٣ س − ٧) = ١٨٠ × ٧ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{و\,(٣\,س - ٧)}{و\,(س - ٣)} = \frac{١٨٠ \times ٧}{٣٦٠} = \frac{٧}{٢}$

∴ $\frac{٣\,س - ٧}{س - ٣} = \frac{٧}{٢}$

∴ ٧ س − ٢١ = ٦ س − ١٤ ∴ س = ٧ سم

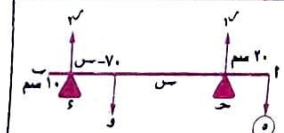
∵ م = ٨ سم ، م ح = ١٤ سم ∴ ب ح = ٢٢ سم

∴ البُعد بين الحاملين = ٢٢ سم

من (١) : ∴ و × ٤ = ٣٦٠ ∴ و = ٩٠ ث.جم

٣٨

• عند تعليق ثقل ٥ ث.كجم



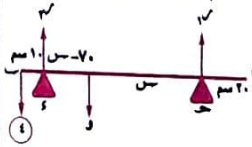
من أ فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ح

∴ ر$_{٢}$ = صفر ، ق$_{ح}$ = صفر

∴ و س − ٥ × ٢٠ = صفر

∴ و س = ١٠٠ (١)

• عند تعليق ثقل ٤ ث.كجم من ب يصبح القضيب على وشك الدوران حول ء



∴ ر$_{١}$ = صفر

، ق$_{ء}$ = صفر

∴ ٤ × ١٠ − و (٧٠ − س) = صفر

∴ ٤٠ − ٧٠ و + و س = صفر (٢)

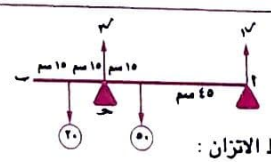
وبالتعويض من (١) : ∴ ٤٠ + ١٠٠ = ٧٠ و

∴ و = ٢ ث.كجم ، من (١)

∴ س = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ سم

∴ وزن القضيب ٢ ث.كجم يؤثر على بعد ٧٠ سم من أ

٣٩



من شروط الاتزان :

∴ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ٧٠ (١)

، ق$_{م}$ = صفر

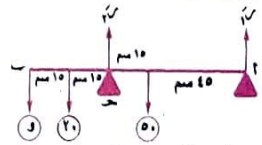
∴ ٥٠ × ٤٥ − ر$_{٢}$ × ٦٠ + ٢٠ × ٧٥ = صفر

∴ ر$_{٢}$ = ٦٢$\frac{١}{٢}$ نيوتن

، من (١) : ∴ ر$_{١}$ = ٧$\frac{١}{٢}$ نيوتن

∴ ض$_{٢}$ = ٦٢$\frac{١}{٢}$ ، ض$_{١}$ = ٧$\frac{١}{٢}$ نيوتن

• عند تعليق ثقل «و» عند ب فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ح



∴ ر$_{١}$ = صفر ، ق$_{ح}$ = صفر

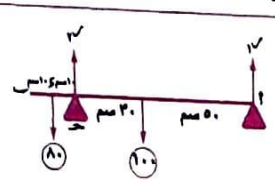
∴ و × ٣٠ + ٢٠ × ١٥ − ٥٠ × ١٥ = صفر

∴ و = ١٥ نيوتن

∴ ر$_{٢}$ = ٥٠ + ٢٠ + ١٥ = ٨٥ نيوتن

∴ ض$_{ح}$ = ٨٥ نيوتن

٤٠



من شروط الاتزان :

∴ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ١٨٠ (١)

، ق$_{م}$ = صفر

∴ ١٠٠ × ٥٠ − ر$_{٢}$ × ٨٠ + ٨٠ × ٩٠ = صفر

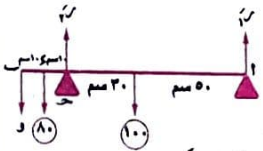
∴ ر$_{٢}$ = ١٥٢$\frac{١}{٢}$ نيوتن

، من (١) :

∴ ر$_{١}$ = ٢٧$\frac{١}{٢}$ نيوتن ∴ ض$_{١}$ = ٢٧$\frac{١}{٢}$ نيوتن

، ض$_{ح}$ = ١٥٢$\frac{١}{٢}$ نيوتن

• عند تعليق ثقل من ب مقداره «و» نيوتن ليكون القضيب على وشك الدوران حول ح يكون ر$_{١}$ = صفر

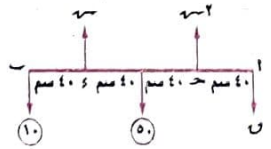


∴ ق$_{ح}$ = صفر

∴ و × ٢٠ + ٨٠ × ١٠ − ١٠٠ × ٣٠ = صفر

∴ و = ١١٠ نيوتن

٤١



من شروط الاتزان :

∴ ٣ ر = و + ٦٠ (١)

، ق$_{م}$ = صفر

∴ − ٢ ر × ٤٠ + ٥٠ × ٨٠

− ر × ١٢٠ + ١٠ × ١٦٠ = صفر

∴ ٤٠٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٠٠ ر

∴ ر = ٢٨ نيوتن

، من (١) : ∴ و = ٢٤ نيوتن

٤٢

• **فى الحالة الأولى :**

من شروط الاتزان :



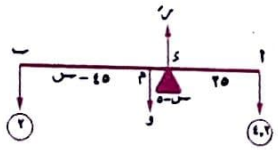
∴ ق$_{ح}$ = صفر

∴ و س + ٢ × ٤٥ − ٧ × ٢٠ = صفر

∴ و س = ٥٠ (١)

• **فى الحالة الثانية :**

من شروط الاتزان :



∴ ق$_{ء}$ = صفر

∴ و (س − ٥) + ٢ × ٤٠ − ٤,٢ × ٢٥ = صفر

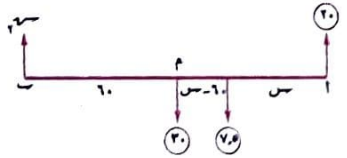
و س − ٥ و + ٨٠ − ١٠٥ = صفر

، من (١) : ∴ ٥٠ − ٢٥ = ٥ و ∴ و = ٥ نيوتن

∴ س = ١٠ سم

∴ الوزن ٥ نيوتن ، بعد نقطة تأثير الوزن من أ = ٣٠ سم

٤٣



من شروط الاتزان :

∴ ٢٠ + ر = ٣٧,٥

∴ ر = ١٧,٥ نيوتن ، ق$_{م}$ = صفر

∴ ٧,٥ س + ٣٠ × ٦٠ − ١٧,٥ × ١٢٠ = صفر

∴ س = ٤٠ سم

∴ الثقل يمكن أن يعلق بحيث يكون على مسافة لا تقل عن ٤٠ سم من أى طرف دون أن ينقطع الخيط.

حل آخر :

∵ $س_{م_1} + س_{م_2} = ٣٧,٥$

، ∵ أى من الخيطين لا يتحمل شدًا يزيد عن ٢٠ نيوتن

∴ أقل شد فى الخيط الآخر = $٣٧,٥ - ٢٠ = ١٧,٥$ نيوتن

∴ $١٧,٥ \geq$ الشد فى أى خيط ≥ ٢٠

، ∵ $ج_{م_1} =$ صفر

∴ $س_{م_2} \times ١٢٠ = ٧,٥ س + ٣٠ \times ٦٠$

∴ $س_{م_2} = \frac{٧,٥ س + ١٨٠٠}{١٢٠}$

∴ $١٧,٥ \geq \frac{٧,٥ س + ١٨٠٠}{١٢٠} \geq ٢٠$

∴ $٤٠ \geq س \geq ٨٠$

أى أن : الثقل يمكن أن يعلق على بُعد بين ٤٠ سم ، ٨٠ سم من أ أو عندهما.

٤٤

من شروط الاتزان : ∴ $٥ + س_{م_2} = ٧$

∴ $س_{م_2} = ٢$

، $ج_{م_1} =$ صفر

∴ $٤ س + ٣ \times ٤٠ - ٢ \times ٨٠ =$ صفر ∴ $س = ١٠$

∴ الثقل يعلق على بعد لا يقل عن ١٠ سم من أى من الطرفين

حل آخر :

∵ $س_{م_1} + س_{م_2} = ٧$

، ∵ أى من الخيطين لا يتحمل شدًا يزيد عن ٥ ث.كجم

∴ أقل شد فى الخيط الآخر = $٧ - ٥ = ٢$ ث.كجم

∴ $٢ \geq$ الشد فى أى خيط ≥ ٥

، ∵ $ج_{م_1} =$ ٠ ∴ $٤ س + ٣ \times ٤٠ = س_{م_2} \times ٨٠$

∴ $س_{م_2} = \frac{٤ س + ١٢٠}{٨٠} = \frac{س + ٣٠}{٢٠}$

∴ $٢ \geq \frac{س + ٣٠}{٢٠} \geq ٥$ ∴ $١٠ \geq س \geq ٧٠$

∴ الثقل يمكن أن يعلق على بُعد بين ١٠ سم ، ٧٠ سم من أ أو عندهما.

٤٥

① (ب) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (ب)

٤٦

∴ $\overrightarrow{ق_2} // \overrightarrow{ق_1}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2} = ك \overrightarrow{ق_1}$

∴ $\|\overrightarrow{ق_2}\| = |ك| \|\overrightarrow{ق_1}\|$ ∴ $٢٠ = |ك| \times ٥$

∴ $ك = \pm ٤$

، ∵ $\overrightarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ ∴ $ك = ٤$

∴ $\overrightarrow{ق_2} = ١٢ \overrightarrow{س} + ١٦ \overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{ق_3} // \overrightarrow{ق_1}$ ∴ $\overrightarrow{ق_3} = م \overrightarrow{ق_1}$

∴ $\overrightarrow{ق_3} = م (٣ ، ٤) = (٣ م ، ٤ م)$

، ∵ القوى متزنة ∴ $ج_{ق_4} =$ صفر

∴ $٥ \overrightarrow{ق_1} + ٤ \overrightarrow{ق_2} + ٤ \overrightarrow{ق_3} \times ٥ \overrightarrow{ق_4} =$ ٠

∴ $(٣ ، -١) \times (٣ ، ٤) + (-٣ ، -٣) \times (١٢ ، ١٦)$

$+ (٤ ، ٥) \times (٣ م ، ٤ م) =$ ٠

∴ $(١٥ + (-١٢) + م) ٤ =$ ٠

∴ $٣ + م =$ ٠ ∴ $م = -٣$

∴ $\overrightarrow{ق_3} = -٩ \overrightarrow{س} - ١٢ \overrightarrow{ص}$

∵ القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} + \overrightarrow{ق_4} =$ ٠

∴ $\overrightarrow{ق_4} = -(\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3})$

$= -(٦ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص})$

$= -٦ \overrightarrow{س} - ٨ \overrightarrow{ص}$

٤٧

∵ $\overrightarrow{ق_3}$ توازى $\overrightarrow{ق_1}$ ∴ $\overrightarrow{ق_3} = ك \overrightarrow{ق_1}$

∴ $\|\overrightarrow{ق_3}\| = |ك| \|\overrightarrow{ق_1}\|$

∴ $٢ \sqrt{٥} = |ك| \times \sqrt{٥}$ ∴ $|ك| = ٢$

، ∵ $\overrightarrow{ق_3}$ تضاد $\overrightarrow{ق_1}$ فى الاتجاه ∴ $ك = -٢$

∴ $\overrightarrow{ق_3} = -٢ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{ق_3}$ توازى $\overrightarrow{ق_1}$

∴ $\overrightarrow{ق_3} = ل \overrightarrow{ق_1} = ل (١ ، ٢) = (ل ، ٢ ل)$

، ∵ القوى متزنة ∴ $ج_{ق_4} =$ ٠

∴ $٤ \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \times \overrightarrow{ق_3} + ٤ \overrightarrow{ق_4} \times \overrightarrow{ق_3} =$ ٠

∴ $(٣ ، ١) \times (١ ، ٢) + (٠ ، ١) \times (-٢ ، -٤)$

$+ (٢ ، ٣) \times (ل ، ٢ ل) =$ ٠

∴ $٥ + ٢ + ل =$ صفر ∴ $ل = -٧$

∴ $\overrightarrow{ق_3} = -٧ (١ ، ٢) = -٧ \overrightarrow{س} - ١٤ \overrightarrow{ص}$

، ∵ $ج =$ ٠

∴ $\overrightarrow{ق_4} = -(\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3})$

$= -(-٨ \overrightarrow{س} - ١٦ \overrightarrow{ص})$

$= ٨ \overrightarrow{س} + ١٦ \overrightarrow{ص}$

٤٨

من شروط الاتزان : $س_{م_1} + س_{م_2}$

$= ١٢٠٠٠$ نيوتن

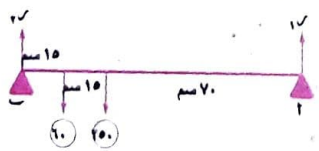
، $ج_{م_1} =$ صفر

∴ $-٣٦٠٠ \times ١\frac{١}{٤} + ٨٤٠٠ \times ١ - س_{م_2} \times ١\frac{١}{٢} =$ صفر

∴ $س_{م_2} = ٢٦٠٠$ نيوتن

ومن (١) : $س_{م_1} = ٩٤٠٠$ نيوتن

٤٩



من شروط الاتزان :

$س_{م_1} + س_{م_2} = ٣١٠$ نيوتن

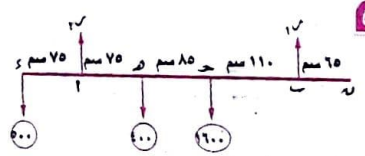
، $ج_{م_1} =$ صفر

$-٦٠ \times ١٥ - ٢٥٠ \times ٣٠ + س_{م_1} \times ١٠٠ =$ صفر

∴ $س_{م_1} = ٨٤$ نيوتن

أى أن : القوى التى تؤثر على يدها = ٨٤ نيوتن

٥٠



من شروط الاتزان :

$س_{م_1} + س_{م_2} = ٢٥٠٠$ (١)

، $ج_{م_1} =$ صفر

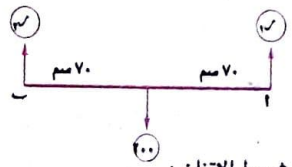
∴ $١٦٠٠ \times ١١٠ + ٤٠٠ \times ١٩٥$

$- س_{م_2} \times ٢٧٠ + ٥٠٠ \times ٣٤٥ =$ صفر

∴ $س_{م_2} \approx ١٥٧٩,٦$

ومن (١) : $س_{م_1} \approx ٩٢٠,٤$ نيوتن

٥١

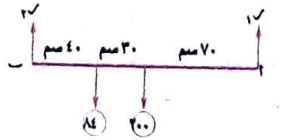


① من شروط الاتزان :

$س_{م_1} + س_{م_2} = ٢٠٠$ (١)

، $س_{م_1} \times ٧٠ = س_{م_2} \times ٧٠$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $س_{م_1} = س_{م_2} = ١٠٠$ ث.كجم

② 

من شروط الاتزان :

(١) $س_1 + س_2 = 284$

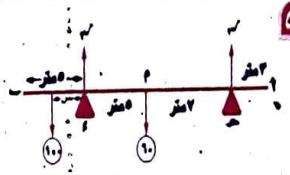
، $ج_م$ = صفر

$200 \times 70 \times 84 + 100 \times س_2 - 140 \times س_2 = 0$

$\therefore س_2 = 160$ ث.كجم

ومن (١) : $س_1 = 124$ ث.كجم

٥٢



$\because 100 \times 3 < 60 \times 7$

$\therefore$ فى المسافة ؟ حـ لا يمكن أن ينقلب اللوح

● عندما يكون اللوح على وشك الانقلاب يكون على وشك الدوران حول ؤ

$\therefore س_1$ = صفر ، $ج_م$ = صفر

$\therefore 100 \times س - 60 \times 5 =$ صفر

$\therefore س = 3$ متر

$\therefore$ أقصى مسافة يمكن أن يمشيها الرجل دون أن ينقلب اللوح = ١٥ + ٣ = ١٨ متر.

٥٣

● **الحالة الأولى :**

$\because$ القضيب متزن

تحت تأثير ٣ قوى

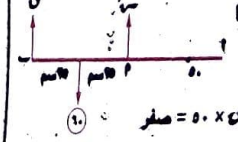


$\therefore 30 \times 50 = 60 \times س$ $\quad\therefore س = 25$

$\therefore$ وزن القضيب يؤثر على بعد ٧٥ سم من ؟

● **الحالة الثانية :**

عندما تؤثر قوة رأسية عند ب يلزم أن تكون لأعلى حتى يتزن القضيب أفقيًا



$\therefore ج_م$ = صفر

$\therefore 60 \times 25 - ق \times 50 =$ صفر

$\therefore ق = 30$ ث.كجم رأسيًا لأعلى كما بالشكل.

٥٤

(١) من شروط الاتزان :

$\therefore س_1 + س_2 = 76$

، $ج_م$ = صفر

$\therefore 6 \times 20 \times 70 - 30 \times س_2 - 60 \times س_2 =$ صفر

$\therefore س_2 = 27$ ث.طن $\quad\therefore$ ض$_ب$ = ٢٧ ث.طن

، ض$_م$ = $س_1 = 76 - 27 = 49$ ث.طن

(٢) عندما تكون السيارة عند منتصف الكوبرى

يكون ض$_م$ = ض$_ب$ = $\frac{76}{2}$ = ٣٨ ث.طن

(٣) من شروط الاتزان :

$\therefore س_1 + س_2 = 76$

، $ج_م$ = صفر

$\therefore 30 \times 70 +$

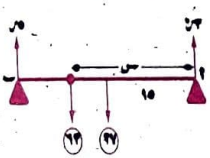
$+ 60 \times 45 - س_2 \times 60 =$ صفر

$\therefore س_1 = 39.5$ ث.طن

$\therefore$ ض$_ا$ = $س_2 = 39.5$ ث.طن

، ض$_م$ = $س_1 = 76 - 39.5 = 36.5$ ث.طن

٥٥



من شروط الاتزان :

$\therefore 8 س = 40$ $\quad\therefore س = 5$ ث.طن

، $ج_م$ = صفر

$\therefore 27 \times 15 + 13 \times س \times 5 - 30 \times 5 =$ صفر

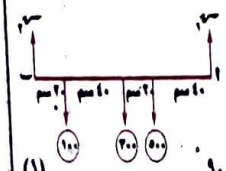
$\therefore س = \frac{7}{13}$ ٢٦ متر

أكمل : السيارة تكون على بعد $\frac{7}{13}$ ٢٦ متر من الطرف ؟

٥٦

● **الحالة الأولى :**

من شروط الاتزان :



(١) $\therefore س_1 + س_2 = 900$

، $ج_م$ = صفر

$\therefore 500 \times 400 + 600 \times 300 + 100 \times 100 -$

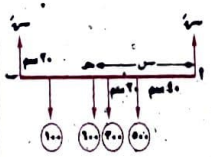
$- س_2 \times 120 =$ صفر

$\therefore س_2 = 400$ ث.جم

، من (١) : $\therefore س_1 = 500$ ث.جم

● **الحالة الثانية :**

من شروط الاتزان :



$\therefore 2 س_2 = 1500$

$\therefore س_2 = 750$ ث.جم

، $ج_م$ = صفر

$\therefore 500 \times 40 + 300 \times 60 +$

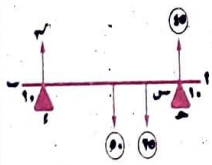
$+ 60 \times س + 100 \times 100 - 750 \times 120 =$ صفر

$\therefore 20000 + 18000 + 10000 + 6000 س = 90000$

$\therefore س = 7$ سم من ؟

٥٧

من شروط الاتزان :



$\therefore س_1 + 45 = 75$

$\therefore س_2 = 30$

، $ج_ح$ = صفر

$\therefore 25 س \times 50 - 40 \times 30 - 80 \times$ صفر

$\therefore س = 16$ سم

$\therefore$ الثقل يطق على بعد لا يقل عن ٣٦ سم من ؟ أو من ب

$\therefore$ الثقل يطق بين التدريجين ٣٦ ، ٧٤ سم أو عند أحدهما.

حل آخر :

$\because س_1 + س_2 = 75$

، $\because$ أى من الحاملين لا يتحمل ضغطًا يزيد عن ٤٥ ث.جم

$\therefore$ أقل ضغط على الحامل الآخر = ٧٥ - ٤٥ = ٣٠ ث.جم

$\therefore ٣٠ \geq$ الضغط على الحامل ≥ 45

، $\because ج_ح = 0$ $\quad\therefore 25 س + 50 \times 40 = س_2 \times 80$

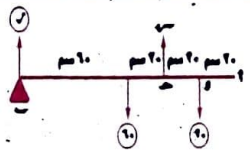
$\therefore س_2 = \frac{25 س + 2000}{80} = \frac{5 س + 400}{16}$

$\therefore ٣٠ \geq \frac{5 س + 400}{16} \geq 45$

$\therefore 16 س \geq 64$ $\quad\therefore ٣٦ \geq س + 10 \geq 74$

$\therefore$ الثقل يطق بين التدريجين ٣٦ سم ، ٧٤ سم أو عند أحدهما.

٥٨



$\because$ القضيب متزن $\quad\therefore س_1 + س_2 = 80$ (١)

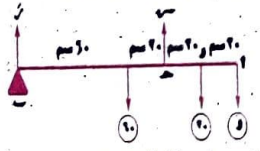
، $ج_ح$ = صفر

$\therefore -20 \times 20 + 60 \times 20 - س_2 \times 80 = 0$

$\therefore س_2 = 10$ نيوتن

ومن (١) $س_1 = 70$ نيوتن

● ويفرض أن الوزن عند ؟ = و نيوتن



$\because$ القضيب على وشك الانفصال

$\therefore س_1 = 0$

$ج_ح$ = صفر

$\therefore -$ و $\times 40 - 20 \times 20 + 20 \times 60 = 0$

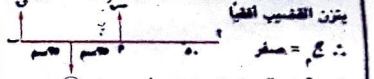
$\therefore$ و = ٢٠ نيوتن

$\therefore س_2 = 20 + 20 + 60 = 100$ نيوتن

∴ وزن القضيب يؤثر على بعد ٧٥ سم من ؟

● **الحالة الثانية :**

عندما تؤثر قوة رأسية عند س يلزم أن تكون لأعلى حتى يتزن القضيب أفقيًا



∴ مجـ = صفر

∴ ٦٠ × ٢٥ – و × ٥٠ = صفر

∴ و = ٣٠ ث.كجم رأسيًا لأعلى كما بالشكل.

من شروط الاتزان :

∴ ٨ ر = ٤٠ ∴ ر = ٥ ث.كجم

∴ مجـ = صفر

∴ ٢٧ × ١٥ + ١٣ × س – ٥ × ٥ × ٣٠ = صفر

∴ س = $\frac{٧}{١٣}$ ٢٦ متر

أي أن : السيارة تكون على بعد $\frac{٧}{١٣}$ ٢٦ متر من الطرف ؟

∴ القضيب على وشك الانفصال

∴ ر = ٠

∴ مجـ = صفر

∴ – و × ٤٠ – ٢٠ × ٢٠ + ٦٠ × ٢٠ = ٠

∴ و = ٢٠ نيوتن

∴ سـ = ٢٠ + ٢٠ + ٦٠ = ١٠٠ نيوتن

∴ مجـ = صفر

∴ ٢٥ س + ٥٠ × ٤٠ – ٣٠ × ٨٠ = صفر

∴ س = ١٦ سم

∴ الثقل يطيق على بعد لا يقل عن ٣٦ سم من ؟ أو من ب

∴ الثقل يطيق بين التدريجين ٣٦ ، ٧٤ سم أو عند أحدهما.

٥٩ ① (ب) ② (ب) ③ (أ)

إرشادات لحل رقم ٥٩ :

① ∵ القضيب متزن تحت تأثير وزن القضيب وردى الفعل المتساويين.

∴ و = ٢ ر

وتؤثر في منتصف المسافة بين ردى الفعل.

أي أن في منتصف حـ و

② ∵ كلما ابتعد الرجل عن ؟ فإن محصلة وزنى الرجل والقضيب تبتعد عن ؟

أي أن محصلة ردى الفعل تبتعد عن ؟

أي أن رد الفعل عند ؟ يقل وبالتالي رد الفعل عند ب يزداد

③ في Δ م ده حـ :

∵ م ده = $\frac{١}{٢}$ ؟ ؟

= $\frac{٣}{٢}$ سم

، ده حـ = م ده ظا ٣٠

= ١ سم

، ده ؟ = $\frac{١}{٢}$ ؟ ب = ٢,٥ سم

∴ ؟ هـ = ٢,٥ – ١ = ١,٥ سم .

، ∵ المجموعة متزنة :

∴ و + ل = ١٠٠ (١)

، ∵ مجـ = ٠

∴ –١٠٠ × ١,٥ × ظا ٣٠ + و × ٥ × ظا ٣٠ = ٠

∴ و = ٣٠

ومن (١) : ∴ ل = ٧٠

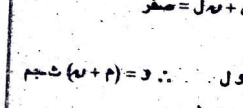
∴ ل – و = ٤٠

٦٠

نفرض ؟ ب = ب حـ = حـ و = ل

● **الحالة الأولى :**

عندما يكون القضيب على وشك الدوران حول ب



∴ ر$_٢$ = صفر

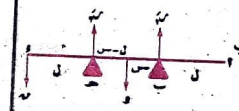
، مجـ = صفر

∴ و س = م ل

∴ – م ل + و س = صفر (١)

● **الحالة الثانية :**

عندما يكون القضيب على وشك الدوران حول حـ



، ر$_١$ = صفر بالمثل مجـ = صفر

∴ – و (ل – س) + ٢ م ل = صفر

∴ – و ل + و س + ٢ م ل = صفر

، من (١) :

∴ م ل + ٢ م ل = و ل ∴ و = (م + ٢ م) ث.كجم

، عندما م = ٥ ، ٢ م = ١٠

∴ و = ١٥ ث.كجم

ومن (١) : ∴ س = $\frac{م\ ل}{و}$ = $\frac{٥\ ل}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$ ل

∵ الوزن يقسم ؟ و بنسبة

$\frac{ل + س}{٢ ل – س}$ = $\frac{ل + \frac{١}{٣} ل}{٢ ل – \frac{١}{٣} ل}$ = $\frac{\frac{٤}{٣} ل}{\frac{٥}{٣} ل}$ = $\frac{٤}{٥}$

٦١

من شروط الاتزان :

∴ ر$_١$ + ر$_٢$ = ٩٠



، مجـ = صفر

∴ ٩٠ × ٢٠ – ر$_٢$ × ٦٠ = صفر

∴ ر$_٢$ = $\frac{٩٠ \times ٢٠}{٦٠}$ = ٣٠ ث.كجم ، ر$_١$ = ٦٠ ث.كجم

∴ الرجل ؟ يحمل ٦٠ ث.كجم والرجل ب يحمل ٣٠ ث.كجم

عندما يحمل ب ٥٠ ث.كجم نفرض أن الثقل يكون على بعد س من ؟

، من شروط الاتزان :

∴ ر$_١$ + ٥٠ = ٩٠

∴ ر$_١$ = ٤٠ ث.كجم

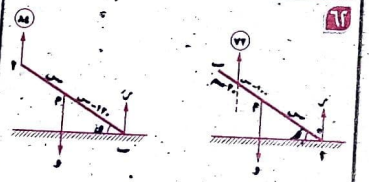
، مجـ = صفر

∴ ٩٠ × س – ٦٠ × ٥٠ = صفر

∴ س = ٣٣ $\frac{١}{٣}$ سم من ؟

∴ أكبر مسافة من ؟ يوضع فيها الثقل حتى يتحمل ب هي ٣٣ $\frac{١}{٣}$ سم

٦٢



● **الحالة الأولى :**

من شروط الاتزان :

∴ مجـ = صفر

∴ و × س متا ر – ٧٢ × ١٠٠ متا ر = صفر

∴ و س = ٧٢ × ١٠٠ (١)

● **الحالة الثانية :**

من شروط الاتزان :

∴ مجـ ب = صفر

∴ و × (١٢٠ – س) متا ى – ٨٤ × ١٢٠ متا ج = صفر

∴ ١٢٠ و – و س = ٨٤ × ١٢٠ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ١٢٠ و – ٧٢ × ٢٠٠ = ٨٤ × ١٢٠

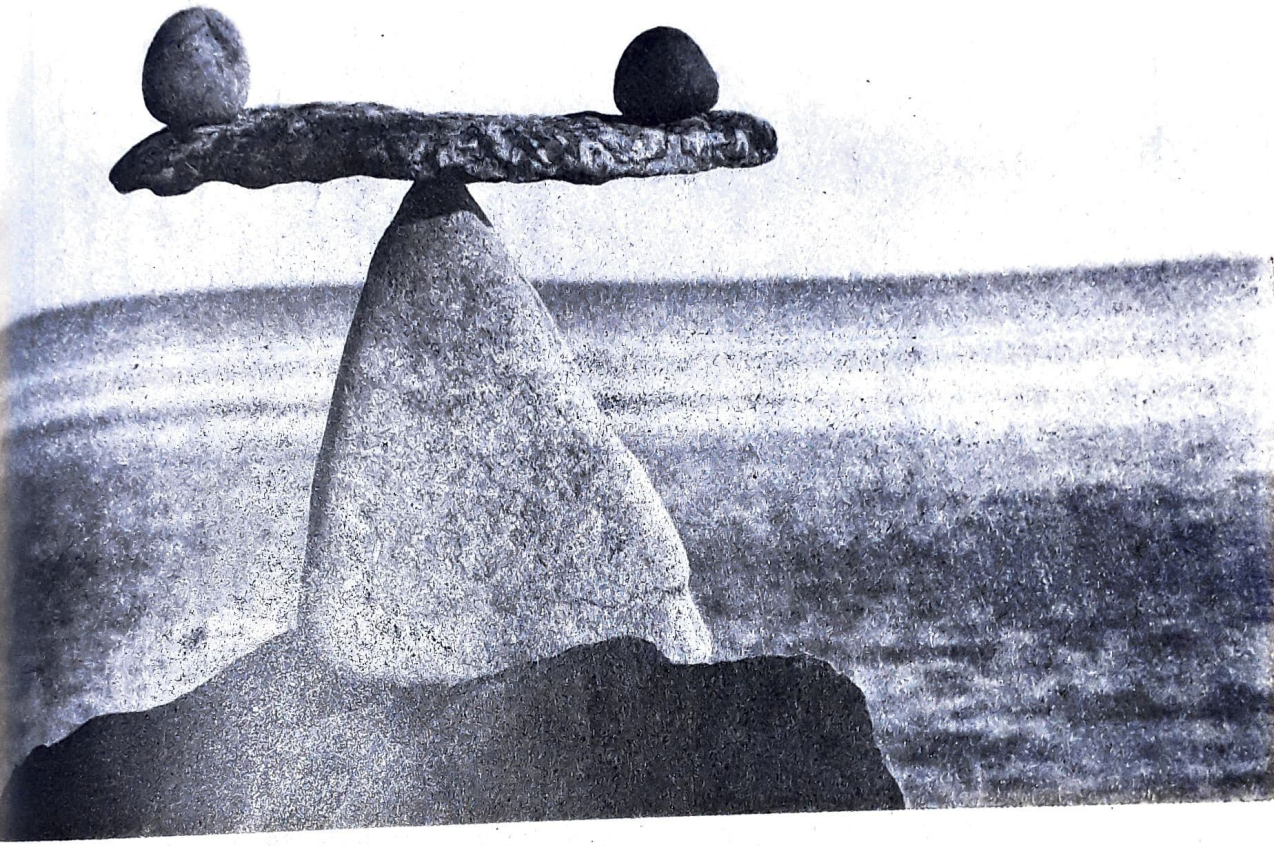
∴ و = ١٤٤ ث.كجم

∴ س = $\frac{١٠٠ \times ٧٢}{١٤٤}$ = ٥٠ سم

أي أن : نقطة تأثير الوزن على بعد ٥٠ سم من ؟

إجابات
تمارين

الوحدة الرابعة



الاتزان العام

إجابات تمارين 7

١

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)

٢

نفرض طول السلم = ل

∵ السلم متزن

∴ س = صفر

∴ $ق_{٢}$ = $ق_{١}$ (١)

، ص = صفر

∴ $ق_{١}$ = ٦٠ نيوتن ، $ج_{م}$ = صفر

∴ ٦٠ × $\frac{ل}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $ق_{٢}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = صفر

$ق_{٢}$ = ٣٠ ∴ $ق_{١}$ = ٣٠ نيوتن

٣

∵ السلم متزن

∴ س = صفر

∴ $ق_{١}$ = $ق_{٢}$ (١)

، ص = صفر

$ق_{٢}$ = ١٧,٥ (٢)

، $ج_{ل}$ = صفر

∴ − $ق_{١}$ × ٥ جا هـ + ١٧,٥ × ٢ جا هـ = صفر

∴ − $ق_{١}$ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ٣٥ × $\frac{٣}{٥}$ = صفر

∴ ٤ $ق_{١}$ = ٢١

∴ $ق_{١}$ = ٥,٢٥ ث.كجم

∴ $ق_{٢}$ = ٥,٢٥ ث.كجم

٤

معادلات الاتزان :

$ق_{٢}$ = $ق_{١}$ (١)

$ق_{١}$ = ٧٠ (٢)

، $ج_{م}$ = صفر

١٠ × $\frac{٣}{٢}$ جا ٤٥° + ٦٠ × ٢ جا ٤٥°

− $ق_{٢}$ × ٣ جا ٤٥° = صفر

١٥ + ١٢٠ = ٣ $ق_{٢}$ $ق_{٢}$ = ٤٥

∴ $ق_{١}$ = ٤٥ ث.كجم

٥

① معادلات الاتزان :

$ق_{١}$ = ٩٠

، $ق_{٢}$ = $ق_{١}$

، $ج_{م}$ = صفر

١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل جا ٤٥°

+ ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل جا ٤٥°

− $ق_{٢}$ × ل جا ٤٥° = صفر

بالقسمة على (ل جا ٤٥°)

∴ ٥ + ٦٠ − $ق_{٢}$ = صفر ∴ $ق_{٢}$ = ٦٥ ث.كجم

، ∴ $ق_{١}$ = ٦٥ ث.كجم

② بعد صعود الرجل :

$ق_{٢}$ = $ق_{١}$

، $ج_{م}$ = صفر

∴ ١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل جا ٤٥° − $ق_{٢}$

+ ٨٠ × ل جا ٤٥° −

× ل جا ٤٥° = ٠

∴ $\frac{٨٥\sqrt{٢}}{٢}$ ل − $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل $ق_{٢}$ = ٠

∴ $ق_{٢}$ = ٨٥ ث.كجم

∴ $ق_{١}$ = ٨٥ ث.كجم

٦

معادلات الاتزان :

$ق_{٢}$ = $ق_{١}$ = ٥٠

، $ق_{١}$ = ٨٠

، $ج_{م}$ = صفر

٢٠ س جا ٤٥° + ٦٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل جا ٤٥° (٢٠)

− $ق_{٢}$ ل جا ٤٥° = صفر

∴ ٢٠ س + ٤٥ ل − ٥٠ ل = صفر

٢٠ س = ٥ ل ∴ س = $\frac{٥}{٢٠}$ ل = $\frac{١}{٤}$ ل

∴ نقطة تأثير الوزن هى م حيث : أ م = $\frac{١}{٤}$ ل

٧

معادلات الاتزان :

$ق_{٢}$ = $ق_{١}$

، $ق_{١}$ = ٨٠

، $ج_{م}$ = صفر

٤٠ × ٦ جا ٤٥° + ٤٠ س جا ٤٥° (٤٠)

− $ق_{٢}$ × ١٢ جا ٤٥° = صفر

٢٤٠ + ٤٠ س = ١٢ $ق_{١}$

∴ $ق_{١}$ = $\frac{٢٤٠ + ٤٠ س}{١٢}$ = $\frac{٦٠ + ١٠ س}{٣}$

، ∵ $ق_{١}$ ≥ ٥٠ ∴ $\frac{٦٠ + ١٠ س}{٣}$ ≥ ٥٠

∴ س ≥ ٩

∴ الرجل لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ أمتار بعدها ينقطع الحبل.

٨

أ حـ = $\sqrt{٩ - ٣,٢٤}$ = ٢,٤

معادلات الاتزان :

• قبل صعود الرجل :

$ق_{١}$ = $ق_{٢}$

، $ج_{ل}$ = صفر

٣٥ × ١,٢ × $\frac{١,٨}{٣}$ − $ق_{١}$ × ٢,٤ = صفر (٨٠)

∴ $ق_{١}$ = $١٠\frac{١}{٢}$ ث.كجم ∴ $ق_{٢}$ = $١٠\frac{١}{٢}$ ث.كجم

• بعد صعود الرجل :

∴ ٣٥ × ١,٢ × $\frac{١,٨}{٣}$ + ٨٠ × ١,٥ × $\frac{١,٨}{٣}$

− $ق_{١}$ × ٢,٤ = صفر

∴ $ق_{١}$ = ٤٠,٥ ث.كجم ∴ $ق_{٢}$ = ٤٠,٥ ث.كجم

٩

معادلات الاتزان :

$ق_{١}$ = $ق_{٢}$ جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ $ق_{٢}$ (١)

، $ق_{٢}$ = ٢٠ + $ق_{٢}$ جا هـ

∴ $ق_{٢}$ = ٢٠ + $\frac{٣}{٥}$ $ق_{٢}$ (٢)

، $ج_{ى}$ = صفر

∴ −٢٠ × ١,٥ − $ق_{١}$ × ٤ + $ق_{٢}$ × ٣ = صفر

٣ $ق_{٢}$ − ٤ $ق_{١}$ = ٣٠ (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣) :

٦٠ + $\frac{٩}{٥}$ $ق_{٢}$ − $\frac{١٦}{٥}$ $ق_{٢}$ = ٣٠

∴ ٣٠ = $\frac{٧}{٥}$ $ق_{٢}$ ∴ $ق_{٢}$ = $\frac{١٥٠}{٧}$ ث.كجم

∴ $ق_{١}$ = $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{١٥٠}{٧}$ = $\frac{١٢٠}{٧}$ ث.كجم

$ق_{٢}$ = ٢٠ + $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{١٥٠}{٧}$ = $\frac{٢٣٠}{٧}$ ث.كجم

١٠

فى Δ أ ب حـ :

أ حـ = $\sqrt{٦^{٢} + (٨)^{٢}}$ = ١٠ ديسم

، ب ء = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ ديسم

، ∵ الساق متزنة :

∴ س = صفر

$س_{١}$ − $ق_{٢}$ جا هـ = صفر

∴ $س_{١}$ − $\frac{٣}{٥}$ $ق_{٢}$ = صفر ∴ $س_{١}$ = $\frac{٣}{٥}$ $ق_{٢}$ (١)

، ص = صفر

∴ $ص_{١}$ + $ق_{٢}$ جا هـ − ٧ − ٢ = ٠

∴ ص١ = ٩ − ٤/٥ س٣ (٢)

، ج١ = صفر

∴ −٢ × ١,٥ − ٧ × ٣ + س٣ × ٤,٨ = صفر

∴ س٣ = ٢٤/٤,٨ = ٥ ث.كجم

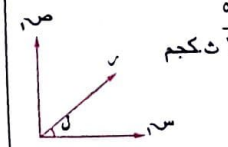
، من (١) ، (٢) : ∴ س١ = ٣/٥ × ٥ = ٣

، ص١ = ٩ − ٤/٥ × ٥ = ٥

∴ ل = √(٩ + ٢٥) = √٣٤ ث.كجم

طا ل = ٥/٣

∴ ق (∠ل) = ٥٩° ٢ ٢



١١

∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

∴ س١ − س٣ جا ٦٠° = صفر

∴ س١ = ١/٢ س٣ (١)

، ص = صفر

∴ ص١ + س٣ جا ٦٠° − ٢ − ٢ = ٠

∴ ص١ = ٤ − √٣/٢ س٣ (٢)

، ج١ = صفر

∴ −٢ × ٥٠ − ٢ × ٧٥ + س٣ × ١ء = ٠

، ∵ ١ء = ١ب جا ٦٠° = ١٠٠ × √٣/٢ = ٥٠ √٣

∴ ٥٠ √٣ س٣ = ٢٥٠

∴ س٣ = ٥/√٣ = ٥√٣/٣ ث.كجم

، من (١) ، (٢) :

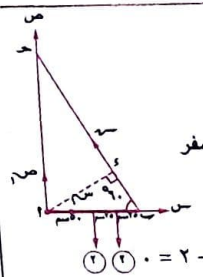
∴ س١ = ١/٢ × ٥√٣/٣ = ٥√٣/٦

، ص١ = ٤ − √٣/٢ × ٥√٣/٣ = ٢/٢

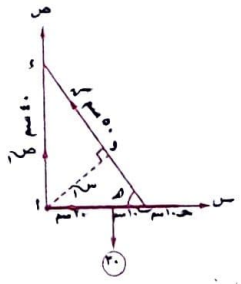
∴ ل = √(٣٩/٤ + ٧٥/٣٦) = √٣٩/٣ ث.كجم

طال = ٢/٢ × ٦/√٣٥ = ٣/√٣٥ = ٣√٣/٥

∴ ق (∠ل) = ٤٦° ٦



١٢



∵ القضيب متزن ∴ س = صفر

∴ س١ − س٣ × جا ٣٠° = صفر

∴ س١ = ٢/٥ س٣ (١)

، ص = صفر ∴ ص١ + س٣ جا ٣٠° − ٣٠ = ٠

∴ ص١ = ٣٠ − ٤/٥ س٣ (٢)

، ج١ = صفر

∴ −٣٠ × ٢٠ + س٣ × ١و = صفر

حيث ١و = ٤٠ × ٣٠ / ٥٠ = ٢٤ سم

∴ س٣ = ٢٤ × ٢٥ = ٦٠٠

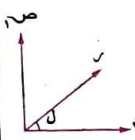
∴ س٣ = ٢٥ ث.كجم

، من (١) ، (٢) : ∴ س١ = ٢/٥ × ٢٥ = ١٥

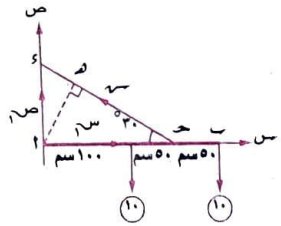
، ص١ = ٣٠ − ٤/٥ × ٢٥ = ٣٠ − ٢٠ = ١٠

ل = √(٢٢٥ + ١٠٠) = ٥√١٣ ث.كجم

طال = ١٠/١٥ = ٢/٣ ∴ ق (∠ل) = ٤١° ٣٣



١٣



∵ القضيب متزن ∴ س = صفر

∴ س١ − س٣ جا ٣٠° = صفر

∴ س١ = √٣/٢ س٣ (١)

، ص = صفر

∴ ص١ + س٣ جا ٣٠° − ١٠ − ١٠ = ٠

∴ ص١ = ٢٠ − ١/٢ س٣ (٢)

، ج١ = صفر

∴ −١٠ × ١٠٠ − ١٠ × ٢٠٠ + س٣ × ١د = صفر

حيث ١د = ١٥٠ جا ٣٠° = ٧٥ ∴ ٧٥ س٣ = ٣٠٠٠

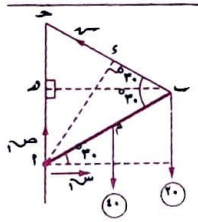
∴ س٣ = ٣٠٠٠ / ٧٥ = ٤٠ نيوتن

، من (١) ، (٢) :

∴ س١ = ٤٠ × √٣/٢ = ٢٠ √٣

ص١ = ٢٠ − ٢٠ = صفر ∴ رد فعل المفصل أفقى ويساوى ٢٠ √٣ نيوتن ويعمل فى اتجاه ← أب

١٤



بفرض طول القضيب = ل

، ∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

س١ − س٣ جا ٣٠° = صفر

∴ س١ = √٣/٢ س٣ (١)

، ص = صفر ،

س٣ جا ٣٠° + ص١ = ٦٠

ص١ = ٦٠ − ١/٢ س٣ (٢)

، ج١ = صفر

∴ −٤٠ × ل/٢ جا ٣٠° − ٢٠ ل جا ٣٠° + س٣ × √٣/٢ ل = صفر

∴ −١٠ √٣ ل − ١٠ √٣ ل + √٣/٢ س٣ ل = صفر

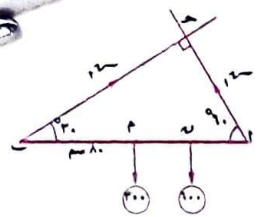
∴ ١/٢ س٣ = ٢٠ ∴ س٣ = ٤٠ نيوتن

س١ = √٣/٢ × ٤٠ = ٢٠ √٣ ، ص١ = ٦٠ − ٢٠ = ٤٠

ل = √(١٢٠٠ + ١٦٠٠) = ٢٠ √٧ نيوتن

طال = ٤٠ / ٢٠ √٣ = ٢√٣/٣

١٥



∵ القضيب متزن ∴ س = صفر

∴ س٣ جا ٣٠° − س٣ جا ٦٠° = صفر

∴ √٣/٢ س٣ = ١/٢ س١

∴ س١ = √٣ س٣ (١)

، ص = صفر

∴ س١ جا ٦٠° + س٣ جا ٣٠° − ٩٠٠ = ٠

∴ √٣/٢ س١ + ١/٢ س٣ = ٩٠٠

∴ √٣ س١ + س٣ = ١٨٠٠ (٢)

، من (١) ، (٢) : ∴ √٣ × √٣ س٣ + س٣ = ١٨٠٠

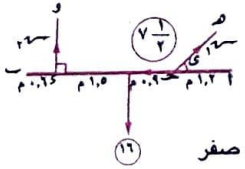
∴ س٣ = ٤٥٠ ث.جم ، س١ = ٤٥٠ √٣ ث.جم

، ج١ = صفر

∴ ٦٠٠ ١د + ٣٠٠ × ٨٠ − ٤٥٠ × ١٦٠ = ١/٢ = صفر

∴ ١د = ٢٠ سم

١٦



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

∴ س١ جا ى − ٧ ١/٢ = صفر

∴ س١ جا ى = ١٥/٢ (١)

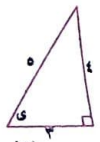
، ص = صفر ∴ س١ جا ى + س٣ = ١٦ (٢)

، ج١ = صفر

∴ ١٦ × ٠,٩ − س٣ × ٢,٤ = صفر

∴ س٣ = ١٦ × ٠,٩ / ٢,٤ = ٦ ث.كجم

من (٢) : س١ جا ى = ١٠



(٣)

∴ $\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1} = \frac{\text{جا}\,\alpha}{\text{جا}\,\beta}$ ∴ $\frac{\text{ق}_2}{10} = \frac{2}{15}$ ∴ طا $= \frac{1}{2}$

∴ $\text{ق}_2 = \frac{2}{5} \times \frac{15}{2}$

∴ $\text{ق}_1 = \frac{15}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 12\frac{1}{4}$ ث كجم

١٧

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \text{ك}\,\text{س}_2$

، $\text{ر}_2 = 60$

$\text{ر}_1 = 60\,\text{ك}$

، جـ = صفر

∴ $60 \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا $60° - \text{ر}_1 \text{ل}$ جا $60° =$ صفر

∴ $15\,\text{ل} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ل} \times 60\,\text{ك} =$ صفر

∴ $15 = 30\sqrt{3}\,\text{ك}$

∴ $\text{ك} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

قوة الاحتكاك = $\text{ك}\,\text{س}_2 = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 10\sqrt{3}$ نيوتن

رد فعل الحائط = $\text{ر}_1 = 60\,\text{ك} = 10\sqrt{3}$ نيوتن

١٨

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \frac{1}{2}\text{ك}\,\text{س}_2$ (١)

، $\text{ر}_2 = 10$

∴ $\text{ر}_1 = 5$

، جـ = صفر

∴ $10 \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا هـ $- 5 \times \text{ل}$ جا هـ = صفر

∴ $5\,\text{ل}$ جتا هـ $= 5\,\text{ل}$ جا هـ ∴ جتا هـ = جا هـ

∴ طا هـ = ١ ∴ ق (∠ هـ) = $45°$

١٩

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \frac{1}{4}\text{ر}_2$

، $\text{ر}_2 = \text{و}$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{1}{4}\text{و}$

جـ = صفر

∴ $\text{و} \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا هـ $- \text{ر}_1 \times \text{ل}$ جا هـ = صفر

∴ $\frac{\text{و}}{2}$ جتا هـ $- \frac{1}{4}\text{و}$ جا هـ = صفر

∴ $\frac{1}{2}$ جتا هـ $= \frac{1}{4}$ جا هـ ∴ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = 2$

∴ طا هـ = ٢

٢٠

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \text{و}$ (١)

، $\text{ر}_2 = \text{ك}\,\text{س}_1$ (٢)

، $\text{جـ}_1 =$ صفر

∴ $\text{و} \times \frac{1}{2}\text{ل}$ جا هـ = صفر

$- \text{ر}_2 \times \text{ل}$ جا هـ = صفر

، من (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ $\frac{1}{2} \times$ ك $\times$ ك $\times \frac{2}{13} - \text{ك}\,\text{س} \times \text{ك}\,\text{س} \times \text{ل} \times \frac{3}{13} =$ صفر

∴ $\frac{1}{13} = \text{ك}\,\text{س} \times \frac{2}{13}$ ∴ $\text{ك}\,\text{س} = \frac{1}{2}$

∴ معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقى = $\frac{1}{2}$

٢١

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \text{ك}\,\text{س}_2$

، $\text{ر}_2 = 15$ نيوتن

∴ $\text{ر}_1 = 15\,\text{ك}$ ، جـ = صفر

∴ القضيب متزن ∴ ك س = صفر

∴ $\text{ر}_1 - \text{ر}_2$ جتا $30° =$ صفر

∴ $\text{ر}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ر}_2$ (١)

∴ ق (∠ د ل) $\approx 46°$

∴ $\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1} = \frac{\text{جا}\,\alpha}{\text{جا}\,\beta}$

∴ $\frac{\text{ق}_2}{16} = \frac{0.9}{2.4}$

∴ $\text{ق}_2 = \frac{16 \times 0.9}{2.4} = 6$ ث كجم

من (٢) : ق_2 جا $\alpha = 10$ (٣)

ق = $\sqrt{12000 + 1600} = 20\sqrt{7}$ نيوتن

طا $\beta = \frac{40}{20\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

∴ $\text{ر}_1 \times 15 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{ل} \times \frac{1}{2} =$ صفر

، ∵ $\text{ر}_1 \times \frac{1}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ ∴ $\text{ر}_1 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ نيوتن

، ∵ $\text{ر}_1 = \text{ك}\,\text{س} \times 15$ ∴ $\frac{15\sqrt{3}}{2} = 15\,\text{ك}\,\text{س}$

∴ ك س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٢٢

∴ السلم يكون على وشك الانزلاق عندما يصل الرجل إلى قمته

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_2 = \text{ك}\,\text{س}_1$ ، $\text{ر}_1 = 250$

، جـ$_1 =$ صفر

∴ $100 \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا $60° + 150\,\text{ل}$ جتا $60°$

$- \text{ر}_2\,\text{ل}$ جا $60° =$ صفر

∴ $25 + 75 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ر}_2$

∴ $\text{ر}_2 = 100 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$

، ∵ $\text{ر}_2 = 250$ ك س ∴ $\frac{200\sqrt{3}}{3} = 250$ ك س

∴ ك س $= \frac{200\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{250} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$

∴ معامل الاحتكاك بين الطرف أ للسلم ومستوى الأرض يساوى $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

٢٣

بفرض أن الفتاة تصعد مسافة س يكون عندها السلم على وشك الانزلاق

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{ر}_2$ حيث ك س $= \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\text{ر}_2 = 80$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 80$

$= \frac{40}{\sqrt{3}}$

، جـ = صفر

∴ $20 \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا $60° + 60\,\text{س}$ جتا $60°$

$- \text{ر}_1 \times \text{ل}$ جا $60° =$ صفر

∴ $5\,\text{ل} + 30\,\text{س} = \frac{40\sqrt{3}}{3}\text{ل} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $30\,\text{س} = 20\,\text{ل} - 5\,\text{ل} = 15\,\text{ل}$

∴ س $= \frac{1}{2}$ ل

أى أن: أقصى مسافة تصعدها الفتاة تساوى $\frac{1}{2}$ طول السلم.

٢٤

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 + 10$ جتا $30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ر}_2$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ر}_2 - 5\sqrt{3}$ (١)

، 10 جا $30° + \text{ر}_2 = 30$

∴ $\text{ر}_2 = 30 - 5 = 25$

∴ $\text{ر}_1 = 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 5\sqrt{3}$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ ، جـ = صفر

∴ $30 \times \frac{\text{ل}}{2}$ جتا هـ $- \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \text{ل}$ جا هـ = صفر

∴ 15 جتا هـ $= \frac{15\sqrt{3}}{2}$ جا هـ

∴ طا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{15}{15} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

٢٥

أ حـ = $\sqrt{676000 - 1000000} = 240$ سم

معادلات الاتزان :

$\text{ر}_1 + \frac{1}{2}\text{ر}_2 = \text{و}$

∴ $\text{ر}_2 = \text{و}$

، جـ = صفر

∴ و × ٥٠ − ق١ × ٢٤٠ = صفر

٢٤٠ ق١ = ٥٠ و ∴ ق١ = $\frac{٥}{٢٤}$ و

∴ $\frac{٥}{٢٤}$ و + $\frac{١}{٢}$ و = ق ∴ ق = $\frac{١٧}{٢٤}$ و

٢٦

معادلات الاتزان :

ق١ + ق = $\frac{٣}{٤}$ ق٢

ق٢ = ٢٠

، جـ١ = صفر

∴ ٢٠ × $\frac{ل}{٢}$ متا ٥٤° − ق١ ل ما ٥٤° = صفر

∴ ق١ = ١٠ نيوتن ∴ ١٠ + ق = $\frac{٣}{٤}$ × ٢٠

∴ ١٠ + ق = ١٥ ∴ ق = ٥ نيوتن

٢٧

معادلات الاتزان :

ق١ = ح

، ق٢ = و

، جـ١ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ متا ٤٥° − ق١ ل ما ٤٥° = صفر

∴ ق١ = $\frac{و}{٢}$ ∴ ح = $\frac{١}{٢}$ و

، ∵ ق٢ = ق١

لكى يكون القضيب متزنًا يلزم أن تكون ح ≤ ق

∴ ق ≤ $\frac{١}{٢}$ و

أى أن : معامل الاحتكاك السكونى لا يقل عن $\frac{١}{٢}$

وبفرض أن القوة التى تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط = ق١

∴ معادلات الاتزان هما :

ق١ + $\frac{٣}{٤}$ ق٢ = ق١ = و

∴ ق١ + $\frac{٣}{٤}$ و = ق١

، جـ١ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ متا ٤٥° − ق١ ل ما ٤٥° = صفر

∴ ق١ = $\frac{و}{٢}$ ∴ ق١ = $\frac{١}{٢}$ و + $\frac{٣}{٤}$ و = $\frac{٥}{٤}$ و

وبفرض أن القوة التى تجعل القضيب على وشك الحركة بعيدًا عن الحائط = ق٢

∴ معادلات الاتزان :

ق١ + ق٢ = $\frac{٣}{٤}$ ق٢ ، ق٢ = و

∴ ق١ + و = $\frac{٣}{٤}$ و

، جـ١ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ متا ٤٥° − ق١ ل ما ٤٥° = صفر

∴ ق١ = $\frac{١}{٢}$ و ∴ ق٢ = $\frac{٣}{٤}$ و − $\frac{١}{٢}$ و = $\frac{١}{٤}$ و

٢٨ (ج) ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④

(د) ⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦

٢٩

معادلات الاتزان :

ق١ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ ق٢ (١)

ق٢ = ق + ١٠٠ (٢)

، جـ١ = صفر

١٠٠ × $\frac{ل}{٢}$ متا ٦٠° + ق ل متا ٦٠°

− ق١ ل ما ٦٠° = صفر

٢٥ + $\frac{١}{٢}$ ق = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ق١ (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣) :

٢٥ + $\frac{١}{٢}$ ق = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ (ق + ١٠٠)

٢٥ + $\frac{١}{٢}$ ق = $\frac{٣}{٨}$ ق + $\frac{٧٥}{٢}$

$\frac{١}{٨}$ ق = ١٢$\frac{١}{٢}$

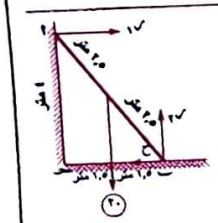
∴ ق = ١٠٠ ث.كجم ∴ ق٢ = ٢٠٠ ث.كجم

، ق١ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ × ٢٠٠ = ٥٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

∴ ق١ = ٤٠ + ٢٠

∴ ق = ٦٠ − ٥٠ = ق ∴ ق = ١٠ ث.كجم

٣١



نفرض أن السلم متزن

ق١ = ح

ق٢ = ٢٠

، جـ١ = صفر

٢٠ × ١,٥ − ق١ × ٤ = صفر

∴ ق١ = ٧$\frac{١}{٢}$ ∴ ٣٠ = ق١ × ٤

∵ مقدار ح عندئذ = ك ق٢ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ = ٥

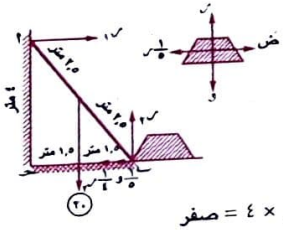
∴ السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة لأن ح > ك ق

بعد وضع الجسم الذى وزنه (و)

• **بالنسبة للجسم :**

∴ ض = $\frac{١}{٥}$ ق ، و = ق ∴ ض = $\frac{١}{٥}$ و

• **بالنسبة للسلم :**



ق١ = $\frac{١}{٤}$ و + $\frac{١}{٥}$ و

ق٢ = ٢٠

، جـ١ = صفر

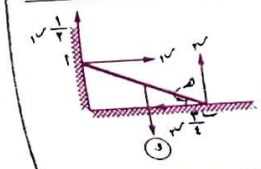
٢٠ × ١,٥ − ق١ × ٤ = صفر

∴ ٣٠ = ق١ × ٤ ∴ ق١ = ٧$\frac{١}{٢}$

∴ ٧$\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ × $\frac{١}{٥}$ و

∴ و = ١٢$\frac{١}{٢}$ ث.كجم

٣٢



معادلات الاتزان :

ق١ = $\frac{٣}{٤}$ ق٢ (١)

، ق٢ + $\frac{١}{٢}$ ق١ = و (٢)

حل آخر :

لكى لا يختل الاتزان ∴ ح ≤ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ ق٢

معادلات الاتزان :

ق١ = ح ، ق٢ = ١٠٠ + ق ، جـ١ = .

∴ ١٠٠ × $\frac{ل}{٢}$ متا ٦٠° + ق × ل متا ٦٠°

− ق١ × ل ما ٦٠° = .

∴ ٢٥ + $\frac{١}{٢}$ ق = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ق١ ∴ ق١ = $\frac{٥٠ + ق}{٣\sqrt{٣}}$ = ح

∴ $\frac{٥٠ + ق}{٣\sqrt{٣}}$ ≥ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠٠ + ق)

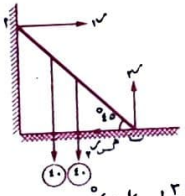
∴ ٤ ق + ٢٠٠ ≥ ٣٠٠ + ٣ ق

∴ ق ≥ ١٠٠

∴ أكبر ثقل يمكن تعليقه عندئذ = ١٠٠ ث.كجم

ونكمل الحل.

٣٠



معادلات الاتزان :

ق١ = ك ق٢

ق٢ = ٨٠

، جـ١ = صفر

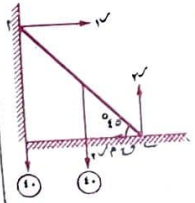
∴ ٤٠ × $\frac{ل}{٢}$ متا ٤٥° + ٤٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل متا ٤٥°

− ق١ ل ما ٤٥° = صفر

∴ ٢٠ + ٣٠ = ق١ ∴ ق١ = ٥٠

∴ ٥٠ = ك ق٢ × ٨٠ ∴ ك = $\frac{٥}{٨}$

إذا اراد الولد أن يتم الصعود



معادلات الاتزان :

ق١ = ق + $\frac{٥}{٨}$ ق٢

ق٢ = ٨٠

، جـ١ = صفر

٤٠ × $\frac{ل}{٢}$ متا ٤٥° + ٤٠ ل متا ٤٥° − ق١ ل ما ٤٥° = صفر

، جـ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ جتا هـ − س$_١$ ل جا هـ

− $\frac{١}{٢}$ س$_١$ ل جتا هـ = صفر

بقسمة الطرفين على ل جتا هـ :

$\frac{و}{٢}$ − س$_١$ ظا هـ − $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = صفر (٣)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\frac{٤}{٣}$ س$_١$ + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = و ∴ س$_١$ = $\frac{١١}{٦}$ و

∴ س$_١$ = $\frac{٦}{١١}$ و (٤)

بالتعويض فى (٣) :

∴ $\frac{و}{٢}$ − $\frac{٦}{١١}$ و ظا هـ − $\frac{٣}{١١}$ و = صفر

∴ ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ∴ ق (∠ هـ) = ٢٢° ٣٧

٣٣

معادلات الاتزان :

س$_٢$ = $\frac{١}{٣}$ س$_١$ (١)

س$_١$ + $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ = و (٢)

، جـ$_م$ = صفر

و × $\frac{ل}{٢}$ جتا هـ − س$_٢$ ل جتا هـ − $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ ل جا هـ = صفر

بالقسمة على (ل جتا هـ) :

∴ $\frac{و}{٢}$ ظا هـ − س$_٢$ − $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ ظا هـ = صفر (٣)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٣ س$_٢$ + $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ = و

$\frac{١٣}{٤}$ س$_٢$ = و ∴ س$_٢$ = $\frac{٤}{١٣}$ و (٤)

بالتعويض من (٤) فى (٣) :

∴ $\frac{و}{٢}$ ظا هـ − $\frac{٤}{١٣}$ و − $\frac{١}{١٣}$ و ظا هـ = صفر

∴ ظا هـ = $\frac{٨}{١١}$

أى أن : ظل زاوية ميل السلم على الرأسى $\frac{٨}{١١}$

٣٤

معادلات الاتزان :

س$_١$ + $\frac{١}{٢}$ س$_٢$ = ق (١)

س$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ س$_١$ + ٤٠ (٢)

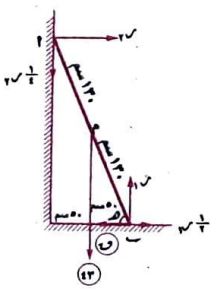
، جـ$_م$ = صفر

٤٠ × $\frac{ل}{٢}$ جتا ٤٥° + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ ل جتا ٤٥° − س$_١$ ل جا ٤٥° = صفر

٢٠ + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ − س$_١$ = صفر ∴ $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = ٢٠

∴ س$_١$ = ٤٠ ، س$_٢$ = ٦٠ ∴ ق = ٦٠ نيوتن

٣٥



معادلات الاتزان :

س$_١$ = $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ + ٤٣ (١)

، س$_٢$ + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = ق (٢)

، جـ$_م$ = صفر

٤٣ × ٥٠ + $\frac{١}{٤}$ س$_٢$ × ١٠٠ − س$_٢$ × ٢٦٠ جتا هـ = ٠

∴ ٢١٥٠ = س$_٢$ ∴ س$_٢$ = ١٠ نيوتن

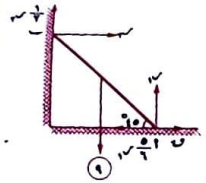
ومن معادلة (١) :

س$_١$ = $\frac{١}{٤}$ × ١٠ + ٤٣ = ٤٥,٥ نيوتن

، ق = ١٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٤٥,٥ = ٣٢,٧٥ نيوتن

٣٦

معادلات الاتزان :



س$_٢$ + ق = $\frac{٥}{٦}$ س$_١$ (١)

س$_١$ + $\frac{١}{٢}$ س$_٢$ = ٩

، جـ$_م$ = صفر

∴ ٩ × $\frac{ل}{٢}$ − س$_٢$ × $\frac{١}{٢ل}$ × ل = $\frac{١}{٢ل}$

− $\frac{١}{٢}$ س$_٢$ × ل = صفر

∴ $\frac{٩}{٢}$ − س$_٢$ − $\frac{١}{٢}$ س$_٢$ = صفر

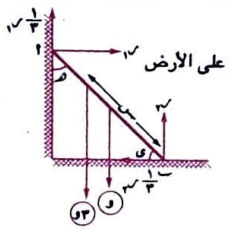
∴ $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ س$_٢$ ∴ س$_٢$ = ٣

∴ س$_١$ = ٩ − $\frac{٣}{٢}$ = ٧,٥

بالتعويض فى (١) : ٣ + ق = $\frac{٥}{٦}$ × ٧,٥

∴ ق = ٣,٢٥ نيوتن

٣٧



بفرض ى زاوية ميل السلم على الأرض

ظا ى = ظا هـ = $\frac{١١}{٦}$

معادلات الاتزان :

س$_١$ = $\frac{١}{٣}$ س$_٢$

س$_٢$ + $\frac{١}{٣}$ س$_١$ = ٤ و

٣ س$_١$ + $\frac{١}{٣}$ س$_١$ = ٤ و

∴ $\frac{١٠}{٣}$ س$_١$ = ٤ و ∴ س$_١$ = $\frac{٦}{٥}$ و

∴ س$_٢$ = $\frac{١٨}{٥}$ و ، جـ$_م$ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ جتا ى + ٣ و س − جتا ى − س$_١$ ل جا ى = صفر

− $\frac{١}{٣}$ س$_١$ ل جتا ى = صفر بالقسمة على جتا ى

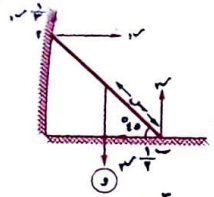
∴ $\frac{و ل}{٢}$ + ٣ و س − $\frac{٦}{٥}$ و ل ظا ى − $\frac{٢}{٥}$ و ل = صفر

∴ $\frac{ل}{٢}$ + ٣ س − $\frac{٦}{٥}$ ل × $\frac{١١}{٦}$ − $\frac{٢}{٥}$ ل = صفر

∴ ٣ س = $\frac{٢١}{١٠}$ ل ∴ س = $\frac{٧}{١٠}$ ل

٣٨

معادلات الاتزان :



س$_١$ = $\frac{١}{٢}$ س$_٢$ (١)

س$_٢$ + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = و (٢)

٢ س$_١$ + $\frac{١}{٢}$ س$_١$ = و

$\frac{٧}{٢}$ س$_١$ = و ∴ س$_١$ = $\frac{٢}{٧}$ و

∴ س$_٢$ = $\frac{٦}{٧}$ و ، جـ$_م$ = صفر

∴ و س جتا ٤٥° − س$_١$ ل جا ٤٥°

− $\frac{١}{٢}$ س$_١$ ل جتا ٤٥° = صفر

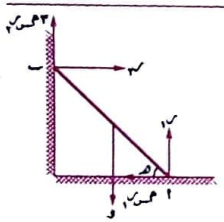
و س = $\frac{٤}{٣}$ س$_١$ ل = $\frac{٤}{٣}$ ل × $\frac{٣}{٧}$ و

و س = $\frac{٤}{٧}$ ل و ∴ س = $\frac{٤}{٧}$ ل

لكن ل = ١٤٠

∴ س = $\frac{٤}{٧}$ × ١٤٠ = ٨٠ سم من الطرف ب

٣٩



ظل زاوية ميل الساق على الحائط = $\frac{٨}{١٣}$

∴ ظل زاوية ميل الساق على الأرض = $\frac{١٣}{٨}$

∴ ظا هـ = $\frac{١٣}{٨}$

معادلات الاتزان :

س$_٢$ = هـ س س$_١$ ، س$_١$ + ٣ هـ س س$_٢$ = و

س$_١$ + ٣ هـ س × هـ س س$_١$ = و

∴ س$_١$ (١ + ٣ هـ$^{٢}_{س}$) = و

∴ س$_١$ = $\frac{و}{١ + ٣ هـ^{٢}_{س}}$ ، س$_٢$ = $\frac{هـ س و}{١ + ٣ هـ^{٢}_{س}}$

، جـ$_م$ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{٢}$ جتا هـ − س$_٢$ ل جتا هـ

− ٣ هـ س س$_٢$ ل جتا هـ = صفر

بالقسمة على ل ﻣ١ :

∴ $\frac{و}{٢}$ − ﻣ٢ ظا هـ − ٣ س ﻣ٢ = صفر

∴ $\frac{و}{٢}$ = ﻣ٢ (ظا هـ + ٣ س)

∴ $\frac{و}{٢}$ = $\left(\frac{٣ س و}{١ + ٣ م^{٢} س}\right)\left(\frac{١٢}{٨} + ٣ س\right)$

∴ ٤ و (١ + ٣ م^٢ س) = ٣ س و (١٣ + ٢٤ س)

∴ ٤ + ١٢ م^٢ س = ١٣ س + ٢٤ م^٢ س

١٢ م^٢ س + ١٣ س − ٤ = .

∴ (٣ س + ٤) (٤ س − ١) = .

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ (مرفوض) ، أ، س = $\frac{١}{٤}$

∴ ﻣ٢ = $\frac{و \frac{١}{٤}}{١ + \frac{١}{١٦} \times ٣}$ = $\frac{و ٤}{١٩}$

رد فعل الحائط (ر) = $\sqrt{(\text{ﻣ}٢)^{٢} + (٣ س \text{ﻣ}٢)^{٢}}$

= $\text{ﻣ}٢ \sqrt{١ + ٩ م^{٢} س}$

= $\frac{و ٤}{١٩} \sqrt{\frac{٩}{١٦} + ١}$ = $\frac{و ٥}{١٩}$

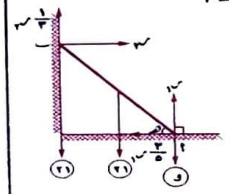
∴ $\frac{٢١}{٢}$ ل + ٢١ س − ٢١ ل ظا هـ − ٧ ل = صفر

∴ ٢١ س + $\frac{٢١}{٢}$ ل − $\frac{٣٥}{٢}$ ل − ٧ ل = صفر

∴ ٢١ س = ١٤ ل ∴ س = $\frac{٢}{٣}$ ل

∴ أقصى مسافة يصعدها الطفل = $\frac{٢}{٣}$ طول السلم

عند وضع الثقل (و) عند ؟



ﻣ١ + $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢ = و + ٤٢

، ﻣ١ = $\frac{٢}{٥}$ ﻣ٢

∴ $\frac{٥}{٣}$ ﻣ٢ + $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢

= و + ٤٢

∴ ﻣ٢ = $\frac{١}{٣}$ و + ٢١

، جـ١ = صفر

∴ ٢١ × $\frac{ل}{٢}$ ﻣا هـ + ٢١ ل ﻣا هـ − ﻣ٢ ل ﻣا هـ

− $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢ ل ﻣا هـ = صفر (بالقسمة على ل ﻣا هـ)

∴ $\frac{٦٣}{٢}$ ﻣ٢ = ﻣ٢ $\left(\frac{٥}{٣} + \frac{١}{٣}\right)$ ∴ ﻣ٢ = ٢٧

∴ ٢٧ = $\frac{١}{٣}$ و + ٢١ ∴ $\frac{١}{٣}$ و = ٦

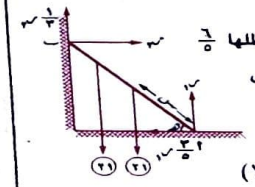
∴ و = ١٢ ث.كجم

٤٠

زاوية الميل على الرأسى ظلها $\frac{٦}{٥}$

∴ زاوية الميل على الأفقى

هـ ظلها $\frac{٥}{٦}$



معادلات الاتزان :

ﻣ١ = $\frac{٣}{٥}$ ﻣ٢ (١)

∴ ﻣ١ + $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢ = ٤٢ ∴ $\frac{٥}{٣}$ ﻣ٢ + $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢ = ٤٢

∴ ٢ ﻣ٢ = ٤٢

∴ ﻣ٢ = ٢١ ∴ ﻣ١ = $\frac{٥}{٣}$ × ٢١ = ٣٥

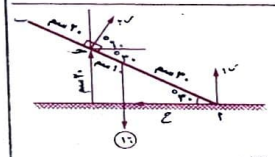
، جـ١ = صفر

∴ ٢١ × $\frac{ل}{٢}$ ﻣا هـ + ٢١ × ﻣس ﻣا هـ − ﻣ٢ ل ﻣا هـ

− $\frac{١}{٣}$ ﻣ٢ ل ﻣا هـ = صفر

بالقسمة على ﻣا هـ :

٤١



معادلات الاتزان :

ﻣ٢ ﻣا ٦٠° = ح

∴ ح = $\frac{١}{٢}$ ﻣ٢

ﻣ١ + ﻣ٢ ﻣا ٦٠° = ١٦

ﻣ١ + $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ ﻣ٢ = ١٦ ، جـ١ = صفر

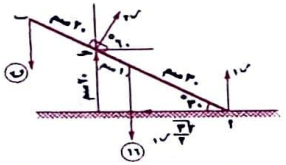
∴ ١٦ × ٣٠ ﻣا ٣٠° − ﻣ٢ × ٤٠ = صفر

١٦ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٤٠ ﻣ٢

ﻣ٢ = ٦ $\sqrt{٣}$ ث.كجم ∴ ح = ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

، ﻣ١ = ١٦ − ٦ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٣\sqrt{}}$ = ٧ ث.كجم

عند تعليق ثقل و من ب



ﻣ٢ ﻣا ٦٠° = $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ ﻣ١ ∴ $\frac{١}{٢}$ ﻣ٢ = $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ ﻣ١

∴ ﻣ١ = $\frac{١}{٣\sqrt{}}$ (١)

ﻣ١ + ﻣ٢ ﻣا ٦٠° = ١٦ + و

ﻣ١ + $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ ﻣ٢ = ١٦ + و (٢)

، جـ١ = صفر

∴ ١٦ × ٢٠ × $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ − ﻣ٢ × ٤٠ + و × ٦٠ ﻣا ٣٠° = صفر

٢٤٠ $\sqrt{٣}$ − ٤٠ ﻣ٢ + ٣٠ $\sqrt{٣}$ و = صفر

٣ $\sqrt{٣}$ و − ٤ ﻣ٢ = −٢٤ $\sqrt{٣}$ (٣)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\frac{١}{٣\sqrt{}}$ ﻣ٢ + $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ ﻣ٢ = ١٦ + و

$\frac{٥}{٣\sqrt{}}$ ﻣ٢ = ١٦ + و

∴ ﻣ٢ = (١٦ + و) × $\frac{٢}{٣\sqrt{}}$ (٤)

بالتعويض من (٤) فى (٣) :

٣ $\sqrt{٣}$ و − ٤ (١٦ + و) × $\frac{٢}{٥}$ = −٢٤ $\sqrt{٣}$

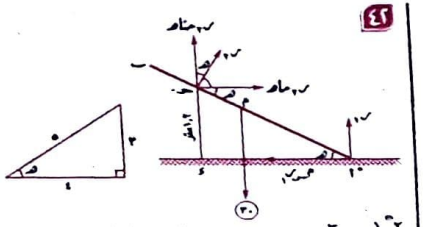
بالضرب × $\frac{٥}{٣\sqrt{}}$:

∴ ١٥ و − ٨ (١٦ + و) = −١٢٠

∴ ٧ و = ١٢٨ − ١٢٠ = ٨

∴ و = $\frac{٨}{٧}$ ث.كجم

٤٢



$\frac{١٠٫٢}{ك ؤ}$ = $\frac{٢}{٤}$ ∴ ؤ = ١٫٦

∴ أ حـ = $\sqrt{\frac{١٤٤ + ٢٥٦}{١٠٠}}$ = ٢ متر

حـ ب = $\frac{٤}{٣}$ متر ، أ م = $\frac{١٠}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{٣}$ متر

معادلات الاتزان :

∴ ﻣ٢ ظا هـ = ﻣس ﻣ١ ∴ $\frac{٣}{٥}$ ﻣ٢ = ﻣس ﻣ١

ﻣ١ + ﻣ٢ ظا هـ = ٣٠ ∴ ﻣ١ + ﻣ٢ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣٠

∴ ﻣ١ + $\frac{٤}{٥}$ ﻣ٢ = ٣٠ ، جـ١ = صفر

∴ ٣٠ × $\frac{٣}{٥}$ − ﻣ٢ × $\frac{٤}{٣}$ + ﻣ٢ × ٢ = صفر

٤٠ = ٢ ﻣ٢

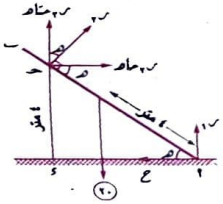
∴ ﻣ٢ = ٢٠ ثقل كجم ∴ ﻣ١ + $\frac{٤}{٥}$ × ٢٠ = ٣٠

∴ ﻣ١ = ٣٠ − ١٦ = ١٤ ثقل كجم

∴ $\frac{٣}{٥}$ × ٢٠ = ١٤ ﻣس

∴ ١٢ = ١٤ ﻣس ∴ ﻣس = $\frac{٦}{٧}$

٤٣



$\frac{٤}{ك ؤ}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ؤ = ٣ متر

∴ أ حـ = ٥ متر

∴ حـ ب = ٣ متر

معادلات الاتزان :

ﻣ٢ ظا هـ = ح ∴ $\frac{٤}{٥}$ ﻣ٢ = ح (١)

، ﻣ١ + ﻣ٢ ظا هـ = ٢٠

∴ ﻣ٢ = ٢٠ ثقل كجم ∴ ﻣ١ + $\frac{٤}{٥}$ × ٢٠ = ٣٠

∴ ﻣ١ = ٣٠ − ١٦ = ١٤ ثقل كجم

∴ $\frac{٣}{٥}$ × ٢٠ = ١٤ ﻣس

∴ ١٢ = ١٤ ﻣس ∴ ﻣس = $\frac{٦}{٧}$

∴ ﻣ١ + $\frac{٣}{٤}$ ﻣ٢ = ٢٠ (٢)

، جـ١ = صفر

∴ ٢٠ × ٤ ظا هـ − ﻣ٢ × ٥ = صفر

∴ ﻣ٢ = ١٦ ث.كجم

∴ ﻣ١ = ٢٠ − ١٦ × $\frac{٣}{٤}$ = ٨ ث.كجم

، جـ١ = صفر

∴ −٢٤ × $\frac{ل}{٢}$ × $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ + ﻣ٢ ل × $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ = صفر

∴ ﻣ٢ = ١٢

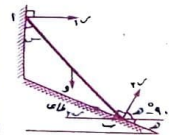
∴ ﻣ١ = ٤٠٠ = ﻣ٢

∴ رد فعل المستوى الخشن ر = $\sqrt{\text{ﻣ}١^{٢} + \text{ﻣ}٢^{٢}}$

= $\text{ﻣ}٢ \sqrt{١ + \frac{٣}{٤}}$ = ٢٠٠ $\sqrt{٧}$

، جـ١ = صفر

٤٨



نفرض أن السلم يصنع زاوية

قياسها س° مع الرأسى

معادلات الاتزان :

∴ $س_1 + ق_2 س_2 = ٦٠$ (٣)

، $ج_2$ = صفر

∴ ٢٠×٤ جتا هـ $- س_2 \times ٥$ = صفر

$٨٠ \times \frac{٣}{٥} = ٥ س_2$ ∴ $٤٨ = ٥ س_2$

∴ $س_2 = ٩,٦$ ث.كجم

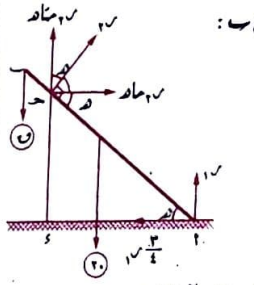
، من (١) : ∴ $ح = ٧,٦٨$

، من (٢) : $س_1 = ١٤,٢٤$ ث.كجم

∵ $ح \geq س_1$ ∴ $٧,٦٨ \geq س_1 \times ١٤,٢٤$

∴ $س_1 \leq \frac{٧,٦٨}{١٤,٢٤}$ ∴ $س_1 \leq \frac{٤٨}{٨٩}$

• **عند تعليق ثقل و من ب :**



$س_2$ جتا هـ $= \frac{٣}{٤} س_1$

$\frac{٤}{٥} س_2 = \frac{٣}{٤} س_1$

$س_2 = \frac{١٥}{١٦} س_1$

$س_1 + \frac{٣}{٥} س_2 \times$

$= ٢٠ + و$

∴ $\frac{١٦}{١٥} س_2 + \frac{٣}{٥} س_2 = ٢٠ + و$

∴ $\frac{٥}{٣} س_2 = ٢٠ + و$ (٣)

، $ج_1$ = صفر

∴ $٢٠ \times ٤ - \frac{٣}{٥} \times س_2 \times ٥ + و \times ٨ \times \frac{٣}{٥}$ = صفر

∴ $٤٨ - ٥ س_2 + \frac{٢٤}{٥} و$ = صفر (٤)

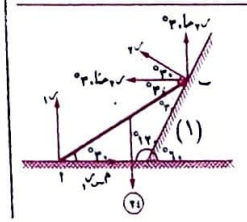
من (٣) : $٥ س_2 = ٦٠ + ٣ و$

بالتعويض فى (٤) :

∴ $٤٨ - ٦٠ - ٣ و + \frac{٢٤}{٥} و$ = صفر

∴ $\frac{٩}{٥} و = ١٢$ ∴ $و = ٦\frac{٢}{٣}$ ث.كجم

٤٤



معادلات الاتزان :

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} س_1 = س_2$ جتا ٣٠°

$\frac{١}{٢} س_2 + س_1 = ٢٤$ (٢)

، من (١) : ∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢} س_1 = س_2$

∴ $س_1 =$ (١)

، $س_2$ جا ٣٠° $= ٦٠٠$ ∴ $\frac{١}{٢} س_2 + س_1 = ٦٠٠$

∴ $\frac{٣}{٢} س_1 = ٦٠٠$ ∴ $س_1 = \frac{٢}{٣} \times ٦٠٠ = ٤٠٠$

، $ج_1$ = صفر

∴ $-٢٤ \times \frac{و}{٢} + س_2 \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + س_2 ل \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = صفر

∴ $س_2 = ١٢$

∴ رد فعل المستوى المائل = ١٢ ث.كجم

، من (٢) : ∴ $٦ + س_1 = ٢٤$ ∴ $س_1 = ١٨$

، من (١) : ∴ $س = ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٢ \sqrt{٣}$

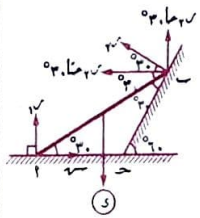
∴ $١٨ - س = ٦ \sqrt{٣}$ ∴ $س = \frac{٦ \sqrt{٣}}{٣}$

رد فعل الأرض $(ر) = \sqrt{س_1^2 + (س_1 - س)^2}$

$= \sqrt{١ + ٣ س^2}$

$= ١٢ \sqrt{٣}$ ث.كجم

٤٥



معادلات الاتزان :

$س = س_2$ جتا ٣٠°

$س = \frac{\sqrt{٣}}{٢} س_2$ (١)

$س_1 + \frac{١}{٢} س_2 = و$ (٢)

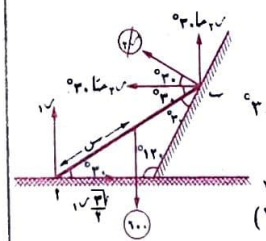
، $ج_1$ = صفر

$-و \times \frac{ل}{٢}$ جتا ٣٠° $+ س_2 ل$ جا ٦٠° = صفر

$س_2 = \frac{ك}{٢}$ ، $س_1 + \frac{و}{٤} = و$ ∴ $س_1 = \frac{٣}{٤} و$

$س = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{و}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} و$

٤٦



معادلات الاتزان :

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} س_1 = س_2$ جتا ٣٠°

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢} س_1 = س_2$

∴ $س_1 =$ (١)

، $س_2$ جا ٣٠° $= ٦٠٠$ ∴ $\frac{١}{٢} س_2 + س_1 = ٦٠٠$

∴ $\frac{٣}{٢} س_1 = ٦٠٠$ ∴ $س_1 = \frac{٢}{٣} \times ٦٠٠ = ٤٠٠$

∴ $س_1 = س_2 = ٤٠٠$

∴ رد فعل المستوى الخشن $ر = س_1 \sqrt{١ + ٣}$

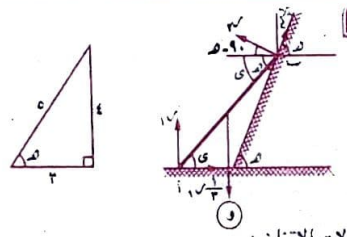
$= ٤٠٠ \sqrt{١ + \frac{٣}{٤}} = ٢٠٠ \sqrt{٧}$

، $ج_1$ = صفر

∴ $-٦٠٠ \times س$ جتا ٣٠° $+ ٤٠٠ \times ٦٠$ جا ٦٠° = صفر

∴ $س$ = ٤٠ سم

٤٧



معادلات الاتزان :

$\frac{١}{٧} س_2$ جتا هـ $+ \frac{١}{٣} س_1 = س_2$ جتا (٩٠° − هـ)

∴ $\frac{١}{٧} س_2$ جتا هـ $+ \frac{١}{٣} س_1 = س_2$ جا هـ

∴ $\frac{١}{٧} س_2 \times \frac{٣}{٥} + \frac{١}{٣} س_1 = \frac{٤}{٥} س_2$

∴ $\frac{١}{٣} س_1 = \frac{٥}{٧} س_2$ ∴ $س_1 = \frac{١٥}{٧} س_2$ (١)

، $س_2$ جا (٩٠° − هـ) $+ \frac{١}{٧} س_2$ جا هـ $+ س_1 = و$

∴ $س_2$ جتا هـ $+ \frac{١}{٧} س_2$ جا هـ $+ س_1 = و$

، $\frac{٣}{٥} س_2 + \frac{١}{٧} \times \frac{٤}{٥} س_2 + س_1 = و$

∴ $\frac{٥}{٧} س_2 + س_1 = و$ (٢)

بالتعويض من (١) :

∴ $\frac{٥}{٧} س_2 + \frac{١٥}{٧} س_2 = و$ ∴ $\frac{٢٠}{٧} س_2 = و$

∴ $س_2 = \frac{٧}{٢٠} و$ ، $س_1 = \frac{٣}{٤} و$ ، $ج_1$ = صفر

$و \times \frac{ل}{٢}$ جتا ى $- س_1 ل$ جتا ى $+ \frac{١}{٣} س_1 ل$ جا ى = صفر

وبالقسمة على ل جتا ى

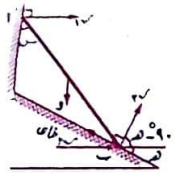
∴ $\frac{و}{٢} - \frac{٣}{٤} و + \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤} و$ ظا ى = صفر

$\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}$ ظا ى = صفر

∴ $\frac{١}{٤}$ ظا ى $= \frac{١}{٤}$ ∴ ظا ى = ١

∴ $و$ (∠ ى) = ٤٥°

٤٨



نفرض أن السلم يصنع زاوية قياسها س° مع الرأسى

معادلات الاتزان :

$س_1 + س_2$ جتا (٩٠° − هـ)

$= س_2$ ظا هـ جتا هـ

$س_1 + س_2$ جا هـ $= س_2$ ظا هـ جا هـ

∴ $س_1 = س_2$ [ظا هـ جتا هـ − جا هـ]

$= س_2 \left[\frac{\text{جا ى}}{\text{جتا ى}} \text{جتا هـ} - \text{جا هـ} \right]$

$= س_2 \left[\frac{\text{جا ى جتا هـ} - \text{جا هـ جتا ى}}{\text{جتا ى}} \right]$

∴ $س_1 = س_2 \frac{\text{جا (ى − هـ)}}{\text{جتا ى}}$ (١)

، $س_2$ جا (٩٠° − هـ) $+ س_2$ ظا هـ جا هـ $= و$

$س_2$ جتا هـ $+ س_2$ ظا هـ جا هـ $= و$

$س_2$ (جتا هـ $+$ ظا ى جا هـ) $= و$

$س_2 \left[\text{جتا هـ} + \frac{\text{جا ى}}{\text{جتا ى}} \text{جا هـ} \right] = و$

$س_2$ [جتا هـ جتا ى $+$ جا ى جا هـ] $=$ و جتا ى

$س_2$ جتا (ى − هـ) $= و$

∴ $س_2 = \frac{و \text{ جتا ى}}{\text{جتا (ى − هـ)}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $س_1 = \frac{و \text{ جتا ى}}{\text{جتا (ى − هـ)}} \times \frac{\text{جا (ى − هـ)}}{\text{جتا ى}}$

∴ $س_1 =$ و ظا (ى − هـ) (٣)

، $ج_1$ = صفر

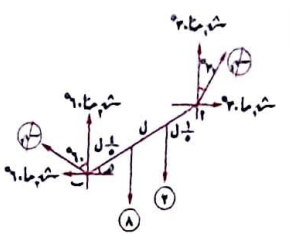
∴ $و \times \frac{ك}{٢}$ جاس $- س_1 ك$ جتاس = صفر

∴ $\frac{و}{٢}$ ظاس $= س_1$

ومن (٣) : ∴ $\frac{و}{٢}$ ظاس = و ظا (ى − هـ)

∴ ظاس = ٢ ظا (ى − هـ)

٤٩



معادلات الاتزان :

$ش_1$ جتا ٣٠° = $ش_2$ جتا ٦٠°

∴ $\frac{1}{2}$ $ش_1$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $ش_2$ (١)

، $ش_1$ جتا ٣٠° + $ش_2$ جتا ٦٠° = ١٠

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $ش_1$ + $\frac{1}{2}$ $ش_2$ = ١٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $ش_1$ = ٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ، $ش_2$ = ٥ نيوتن

، $ج_1$ = صفر

∴ −٨ × $\frac{4}{5}$ ل جتا هـ − ٢ × $\frac{9}{5}$ ل جتا هـ

− ٥ $\sqrt{3}$ جا ٣٠° × ٢ ل جا هـ + ٥ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠°

× ٢ ل $\overline{\text{ظا هـ}}$ = ٠ بالقسمة على ل جتا هـ

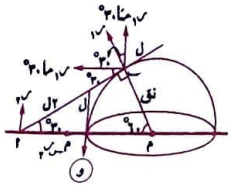
∴ $\frac{-32}{5}$ − $\frac{18}{5}$ − ٥ $\sqrt{3}$ طا هـ + ١٥ = ٠

∴ ٥ $\sqrt{3}$ طا هـ = ٥ ∴ طا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ هـ = ٣٠°

أي أن : القضيب يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

٥٠



معادلات الاتزان :

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $ش_1$ + $ش_2$ = و (١)

، $\frac{1}{2}$ $ش_1$ = $ش_2$ (٢)

، $ج_1$ = صفر

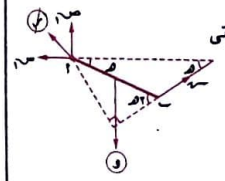
− و × ٢ ل جتا ٣٠ + $ش_1$ × ٢ ل = ٠

∴ − $\sqrt{3}$ و + ٢ $ش_1$ = صفر

∴ $ش_1$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و ومن (١) : $ش_2$ = $\frac{1}{2}$ و

ومن (٢) : ∴ $ش_2$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

٥١



بفرض أن مقدار مركبتي رد فعل المفصل عند أ هما $س_1$ ، $ص_1$

∴ معادلات الاتزان :

$س_1$ = $ش_2$ جتا هـ (١)

$ص_1$ = و − $ش_2$ جا هـ (٢)

، $ج_1$ = ٠ ∴ $ش_2$ × ل جا ٢ هـ = و × $\frac{ل}{2}$ جتا هـ

∴ $ش_2$ × ٢ جا هـ جتا هـ = $\frac{1}{4}$ و جتا هـ

أي أن : $ش_2$ = $\frac{1}{4}$ و $\overline{\text{ظا هـ}}$

وبالتعويض في (١) : ∴ $س_1$ = $\frac{1}{4}$ و $\overline{\text{ظا هـ}}$

وبالتعويض في (٢) : ∴ $ص_1$ = و − $\frac{1}{4}$ و = $\frac{3}{4}$ و

∴ ش (رد فعل المفصل) = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

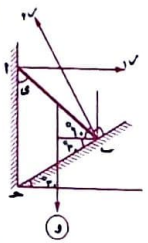
∴ ش = $\sqrt{\frac{1}{16}\text{ و}^2 \overline{\text{ظا}^2 هـ} + \frac{9}{16}\text{ و}^2}$

= $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{\overline{\text{ظا}^2 هـ} + 9}$

= $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{(\overline{\text{ظا}^2 هـ} - 1) + 9}$

= $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{8 + \overline{\text{ظا}^2 هـ}}$

٥٢



معادلات الاتزان :

$ش_1$ = $ش_2$ جتا ٦٠°

∴ $ش_1$ = $\frac{1}{2}$ $ش_2$

، $ش_2$ جا ٦٠° = و

∴ $ش_2$ = $\frac{و}{\text{جا ٦٠°}}$ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ و = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و

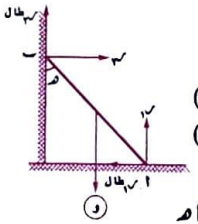
، $ج_1$ = صفر

∴ − $ش_1$ ل جتا ى + و × $\frac{ل}{2}$ جا ى = صفر

$\frac{و}{2}$ جا ى = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و جتا ى

$\frac{\text{جا ى}}{\text{جتا ى}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ∴ طا ى = $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

٥٣



معادلات الاتزان :

$ش_2$ = $ش_1$ طال (١)

$ش_1$ + $ش_2$ طال = و (٢)

، $ج_1$ = صفر

و × $\frac{ل}{2}$ جا هـ − $ش_2$ ل جتا هـ

− $ش_2$ طال × ل جا هـ = صفر

بالقسمة على ل جا هـ :

$\frac{و}{2}$ − $ش_2$ طتا هـ − $ش_2$ طال = صفر

$\frac{و}{2}$ = $ش_2$ (طتا هـ + طال) (٣)

بالتعويض من (٢) :

$\frac{1}{2}$ $ش_1$ + $\frac{1}{2}$ $ش_2$ طال = $ش_2$ (طتا هـ + طال) ومن (١)

$\frac{1}{2}$ × $\frac{ش_2}{طال}$ + $\frac{1}{2}$ $ش_2$ طال = $ش_2$ (طتا هـ + طال)

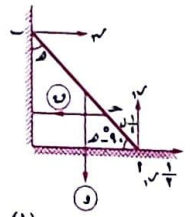
$\frac{1}{2طال}$ + $\frac{طال}{2}$ = طتا هـ + طال

$\frac{1}{2طال}$ − $\frac{طال}{2}$ = طتا هـ طتا هـ = $\frac{1 - \text{طا}^2 ل}{2 \text{ طال}}$

∴ طا هـ = $\frac{2 \text{ طال}}{1 - \text{طا}^2 ل}$ = طا ٢ ل

∴ هـ = ٢ ل

٥٤



معادلات الاتزان :

$ش_2$ + $\frac{1}{2}$ $ش_1$ = و

∴ $ش_2$ = و − $\frac{1}{2}$ $ش_1$

∴ $ش_2$ = و − $\frac{1}{2}$ و (١)

، $ج_1$ = صفر

∴ و × $\frac{ل}{2}$ جتا (٩٠° − هـ) + و × $\frac{ل}{4}$ جا (٩٠° − هـ)

− (و − $\frac{1}{2}$ و) ل جتا هـ = صفر

∴ $\frac{و}{2}$ ل جا هـ + $\frac{و}{4}$ ل جتا هـ − (و − $\frac{1}{2}$ و) ل جتا هـ

= صفر

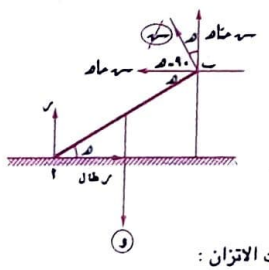
بالقسمة على ل جتا هـ :

$\frac{و}{2}$ طا هـ + $\frac{و}{4}$ − و + $\frac{1}{2}$ و = صفر

$\frac{3}{4}$ و = $\frac{و}{2}$ (١ + طا هـ)

∴ و = $\frac{4}{3}$ × $\frac{و}{2}$ (١ + طا هـ) = $\frac{2}{3}$ و (١ + طا هـ)

٥٥



معادلات الاتزان :

$س_{طال}$ = $ش_{جتا هـ}$ (١)

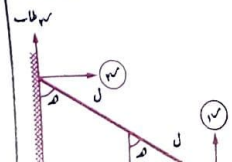
$س$ + $ش_{جتا هـ}$ = و (٢)

بفرض طول الساق = س ، $ج_1$ = صفر

∴ − و × $\frac{س}{2}$ جتا هـ + $ش_{جتا هـ}$ س = صفر

∴ $ش_{جتا هـ}$ = $\frac{و}{2}$ جتا هـ ∴ $ش_{جتا هـ}$ = $\frac{و}{2}$ جتا هـ (٣)

٥٧



معادلات الاتزان :

$ش_2$ = $ش_1$ طا ٢ (١)

، $ش_1$ + $ش_{طاب}$

، $ش_2$ = $ش_{طاب}$ (٢)

، $ج_1$ = صفر

∴ $ش_1$ ل جتا ٢ − $ش_{طاب}$ ل = صفر

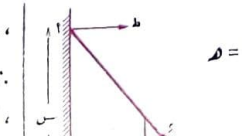
∴ $ش_1$ = $\frac{ش_{طاب}}{\text{جتا ٢}}$ (٣)

من (١) : ∴ $ش_{طاب}$ = $\frac{ش_{طال}}{\text{جتا هـ}}$

∴ $ش_{طال}$ = و جتا هـ

∴ طال = $\frac{و}{2}$ جتا هـ × $\frac{ش}{ش_{طال}}$ = $\frac{و \text{ جا ٢ هـ}}{4 ش}$

٥٨



بفرض أن ق (∠ حـ ب ه) = هـ

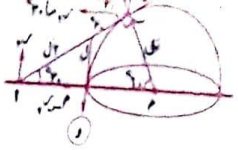
، $\overline{ب ه} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ق (∠ ب ه ا) = ٩٠° − هـ

، $ص_1$ + $ش_{جا ٤٥°}$ = ٠

∴ $ص_1$ + $\frac{ش}{\sqrt{2}}$ = ٠ (٢)

، $ج_1$ = ٠



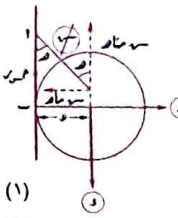
∴ رد فعل المفصل = $\sqrt{(4.8)^2 + (-0.4)^2}$

= 4.82 ثقل كجم

ويميل على الأفقي لأسفل بزاوية ظلها = $\frac{0.4}{4.8}$

أي بزاوية قياسها = 4° 46

٦١



نفرض أن وزن الكرة = (و)

، الخيط يصنع زاوية قياسها هـ على الرأسي

معادلات الاتزان :

$س = ﺱ_1$ ظا هـ (١)

، $ﺱ_1$ ظا هـ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ س = و (٢)

∵ ج$_1$ = صفر ∴ و × نق = س × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نق

∴ و = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س (٣)

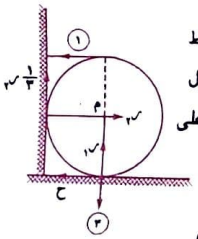
وبالتعويض من (١) ، (٣) فى (٢) :

∴ $\frac{س}{ظا هـ}$ × ظا هـ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س

وبالقسمة على س : ∴ ظا هـ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ظا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٦٢



∵ نقطة التماس مع الحائط على وشك الحركة لأسفل فإن اتجاه الاحتكاك لأعلى

معادلات الاتزان :

$ﺱ_2$ − ح = ١ (١)

$ﺱ_1$ + $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ = ٣ (٢)

، ج$_1$ = صفر

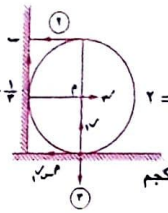
١ × نق − $\frac{1}{3}$ $ﺱ_2$ نق − ح × نق = صفر

١ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ + ح

∴ $ﺱ_2$ + ٢ ح = ٢ (٣)

من (١) ، (٣) : ∴ ٤ ح = ٢

∴ ح = $\frac{1}{2}$ ث كجم



بعد زيادة القوة إلى ٢ ث كجم

معادلات الاتزان :

$ﺱ_2$ = $ﺱ_1$ + ٢ (١)

$ﺱ_1$ + $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ = ٣ (٢)

، ج$_1$ = صفر

٢ نق − $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ × نق − $ﺱ_1$ نق = صفر

٢ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ + $ﺱ_1$ (٣)

لكن : $ﺱ_1$ = $ﺱ_2$ − ٢ من (١)

بالتعويض فى (٣) : ∴ ٢ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_2$ + $ﺱ_2$ − ٢

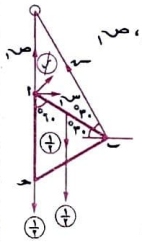
٤ = $\frac{3}{2}$ $ﺱ_2$ ∴ $ﺱ_2$ = ٣

∴ $ﺱ_1$ = ٣ − ٢ = ١

من (٢) : $ﺱ_1$ + ١ = ٣ ∴ $ﺱ_1$ = ٢

٢ ﺱ = ١ ∴ ﺱ = $\frac{1}{2}$

٦٣



بتحليل رد الفعل إلى مركبتين س$_1$ ، ص$_1$

معادلات الاتزان :

$س_1$ = ﺱ ظا ٦٠° (١)

$س_1$ = $\frac{1}{2}$ ﺱ

ﺱ ظا ٦٠° + ص$_1$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ﺱ (٢)

، ج$_1$ = صفر

∴ $\frac{1}{2}$ × ١٠ ظا ٦٠° + $\frac{1}{2}$ × ١٠ ظا ٦٠° = ﺱ × ١٠

∴ ١٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٠ ﺱ ∴ ﺱ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ رد الفعل الموجود بالطرف الآخر = ﺱ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث كجم

ومن (١) : ∴ $س_1$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

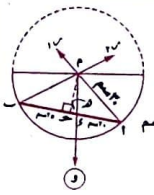
، ومن (٢) : ∴ ص = $\frac{3}{4}$ − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{2}{4}$

س = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$ = $\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{9}{16}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث كجم

، ظا هـ = $\frac{ص_1}{س_1}$ = $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ = $\sqrt{3}$

∴ رد الفعل يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الأفقي.

٦٤



نرسم م حـ ⊥ أ ب

فتكون حـ منتصف أ ب

∴ ح ء = $\frac{45}{2}$ − ٢٠ = ٢,٥ سم

من Δ م أ حـ :

(م حـ)^2 = (٣٠)^2 − (٢٢,٥)^2

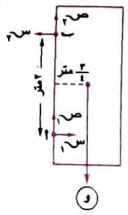
= ٣٩٣,٧٥

، من Δ م ء حـ :

م ء = $\sqrt{(2,5)^2 + 393,75}$ = ٢٠ سم

∴ ظا هـ = $\frac{ح ء}{م ء}$ = $\frac{2,5}{20}$ = $\frac{1}{8}$

٦٥



من معادلات الاتزان :

$س_1$ = $س_2$

، ص$_1$ + ص$_2$ = و

∵ وزن الباب موزع بالتساوى على المفصلين

∴ ص$_1$ = ص$_2$ = $\frac{1}{2}$ و

، ∵ ج$_1$ = صفر

∴ $س_2$ × ٢ = و × $\frac{3}{4}$

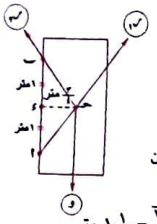
∴ $س_1$ = $س_2$ = $\frac{2}{8}$ و

∴ $ﺱ_1$ = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

= $\sqrt{(\frac{2}{8}و)^2 + (\frac{1}{2}و)^2}$ = $\frac{5}{8}$ و

، ظا هـ = $\frac{\frac{1}{2}و}{\frac{2}{8}و}$ = $\frac{4}{3}$ ∴ ق (∠ هـ) = ٥٣° ٨

حل آخر :



∴ وزن الباب موزع بالتساوى على المفصلين

∴ ب ء = ء أ = ١ متر

، Δ أ ب حـ متساوى الساقين

∴ ب حـ = حـ أ

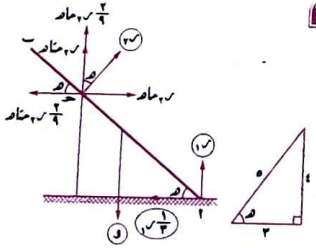
= $\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{4})^2}$ = ١ $\frac{1}{4}$ متر

∴ Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ﺱ_1}{1\frac{1}{4}}$ = $\frac{ﺱ_2}{\frac{2}{4}}$ = $\frac{و}{2}$ ∴ $ﺱ_1$ = $ﺱ_2$ = $\frac{5}{8}$ و

ونكمل الحل.

٦٦



معادلات الاتزان هى :

$ﺱ_2$ ظا هـ = $\frac{1}{3}$ $ﺱ_1$ + $\frac{2}{9}$ $ﺱ_2$ ظا هـ

∴ $\frac{4}{5}$ $ﺱ_2$ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_1$ + $\frac{2}{9}$ × $\frac{2}{5}$ $ﺱ_2$

∴ $\frac{4}{5}$ $ﺱ_2$ − $\frac{2}{15}$ $ﺱ_2$ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_1$

∴ $\frac{2}{3}$ $ﺱ_2$ = $\frac{1}{2}$ $ﺱ_1$

∴ $ﺱ_1$ = ٢ $ﺱ_2$ (١)

، $ﺱ_1$ + $\frac{2}{9}$ $ﺱ_2$ ظا هـ + $ﺱ_2$ ظا هـ = و

، من (١) :

∴ ٢ $ﺱ_2$ + $\frac{2}{9}$ × $\frac{4}{5}$ $ﺱ_2$ + $\frac{3}{5}$ $ﺱ_2$ = و

∴ $\frac{25}{9}$ $ﺱ_2$ = و

∴ $ﺱ_2$ = $\frac{9}{25}$ و (٢)

، ∵ ج$_1$ = ٠

∴ و × ٩٠ ظا هـ − $ﺱ_2$ × أ حـ = ٠

، من (٢) :

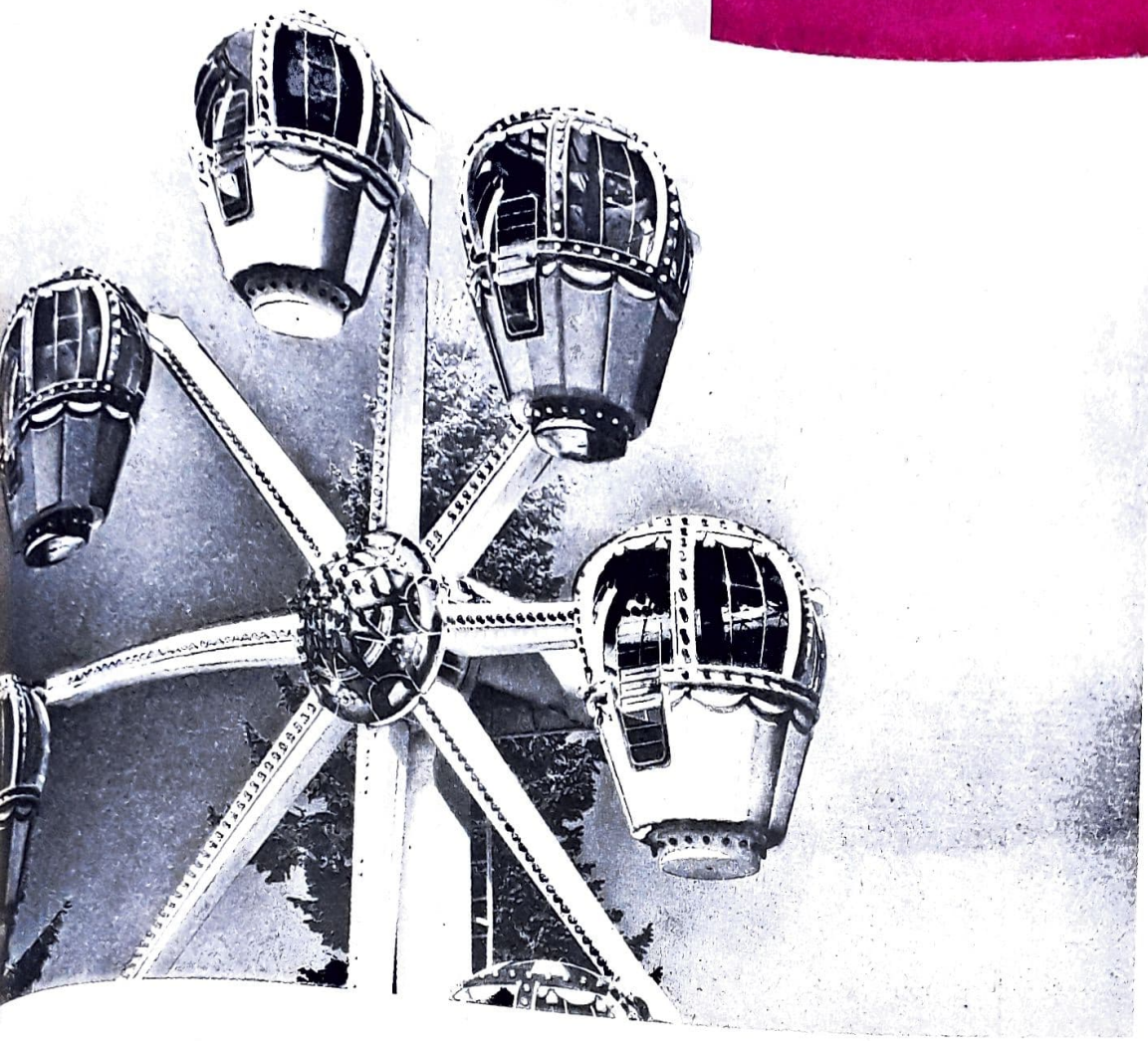
∴ و × ٩٠ × $\frac{2}{5}$ − $\frac{9}{25}$ و × أ حـ = ٠

∴ ٥٤ و = $\frac{9}{25}$ و × أ حـ

∴ أ حـ = ١٥٠ سم

إجابات تمارين

الوحدة الخامسة



الازدواجات

إجابات تمارين 8

أولًا تمارين على القياس الحرى لعزم الازدواج

١

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (د)
⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)
⑨ (جـ) ⑩ (أ) ⑪ (جـ) ⑫ (جـ)
⑬ (د) ⑭ (أ)

٢

∵ $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2} = -٤\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{ا ب} = (٥ ، ٨) - (٣ ، ٥) = (٢ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ا ب} \times \overrightarrow{ق_2} = (-٣ \times ٢ - ٣ \times ٤)\overrightarrow{ع}$

$= -١٨\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{ع}\| = ١٨$

، ∵ $\|\overrightarrow{ق_1}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥$

∴ ل $= \frac{\|\overrightarrow{ع}\|}{\|\overrightarrow{ق_1}\|} = \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$ وحدة طول.

٣

∵ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تكونان ازدواجًا ∴ $\overrightarrow{ق_1} = -\overrightarrow{ق_2}$

∴ م $\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} = -٣\overrightarrow{س} - ن\overrightarrow{ص}$

∴ م $= -٣$ ، ن $= -٢$ ∴ $\overrightarrow{ق_1} = -٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{ا ب} = (١ ، ١) - (-١ ، -٢) = (٢ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ا ب} \times \overrightarrow{ق_1} = (٢ \times ٢ - ٣ \times -٢)\overrightarrow{ع} = ١٣\overrightarrow{ع}$

∴ ل $= \frac{١٢}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول.

٤

∵ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تكونان ازدواجًا ∴ $\overrightarrow{ق_1} = -\overrightarrow{ق_2}$

∴ ا $\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص} = -٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

∴ ا $= -٥$ ، ب $= ٢$

، $\overrightarrow{ح_1} = (-٢ ، ١) - (٣ ، ١) = (-٥ ، ٠)$

، $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ح_1} \times \overrightarrow{ق_1} = (-٥ ، ٠) \times (-٥ ، ٢)$

$= -١٠\overrightarrow{ع}$

، $\|\overrightarrow{ع}\| = ١٠$

، ل $= \frac{١٠}{\sqrt{٤ + ٢٥}} = \frac{١٠\sqrt{٢٩}}{٢٩}$ وحدة طول.

٥

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (٠ ، ٠)$

أي أن: $\overrightarrow{ق_1} = -\overrightarrow{ق_2}$ (١)

، $\overrightarrow{ا ب} = (٦ ، ١) - (٤ ، ١) = (٢ ، ٠)$

، $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ا ب} \times \overrightarrow{ق_2} = (٢ ، ٠) \times (٣ ، -٥)$

$= -١٠\overrightarrow{ع}$ (٢)

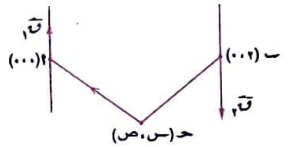
من (١) ، (٢) ينتج أن :

المجموعة تكافىء ازدواجًا عزمه $= -١٠\overrightarrow{ع}$

٦

∵ بالنسبة للقوى الأولى :

$\overrightarrow{ح ا} = (٠ ، ٠) - (س ، ص) = (-س ، -ص)$



، $\overrightarrow{ع_ح} = \overrightarrow{ح ا} \times \overrightarrow{ق_1}$

$= (-س ، -ص) \times (٦ ، ٠)$

$= (-٦س)\overrightarrow{ع}$ (١)

بالنسبة للقوى الثانية :

$\overrightarrow{ح ب} = (٢ ، ٠) - (س ، ص) = (٢ - س ، -ص)$

$\overrightarrow{ع_ح} = (٢ - س ، -ص) \times (٠ ، -٦)$

$= (-١٢ + ٦س)\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع_1} + \overrightarrow{ع_2}$

$= (-٦س)\overrightarrow{ع} + (-١٢ + ٦س)\overrightarrow{ع}$

$= -١٢\overrightarrow{ع}$

∴ مجموع عزوم القوى لا يعتمد على س ، ص

٧

① ع $= ٣٥ \times ٢٤ = ٨٤٠$ نيوتن سم

② ع $= ٣٥ \times ٢٤$ جا $٣٠^\circ = ٤٢٠$ نيوتن سم

③ ع $= -١٠\sqrt{٣} \times ٦$ جا $٦٠^\circ = -٩٠$ نيوتن سم

④ ا ب $\times$ ق $=$ ب حـ $\times$ ل

∴ ١٢ $\times$ ٥ $= ٦ \times$ ل ∴ ل $= ١٠$ سم

∴ ع $= ٧ \times ١٠ = ٧٠$ نيوتن سم

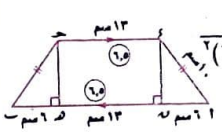
⑤ ع $= -٩ \times$ ا حـ $= -٩ \times ٨\sqrt{٣}$

$= -٧٢\sqrt{٣}$ نيوتن سم

⑥ ع $= ٢٠ \times$ ق ب $= ٢٠ \times ٨\sqrt{٢}$

$= ١٦٠\sqrt{٢}$ نيوتن سم

⑦ من هندسة الشكل :



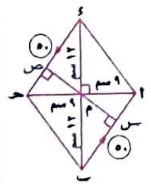
ء هـ $= \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$

$= ٨$ سم

∴ ع $= -٦,٥ \times ٨$

$= -٥٢$ نيوتن سم

⑧ من هندسة الشكل :



ء حـ $= \sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$

$= ١٥$ سم

، م ص $= \frac{٩ \times ١٢}{١٥}$

$= ٧,٢$ سم

∴ س ص $= ١٤,٤$ سم

∴ ع $= ٥٠ \times ١٤,٤ = ٧٢٠$ نيوتن سم

⑨ من هندسة الشكل :



م ص $= ٨$ سم

، م س $= ٥$ سم

∴ س ص $= ١٢$ سم

∴ ع $= ٢٥ \times ١٣$

$= ٣٢٥$ نيوتن سم

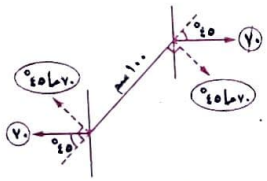
٨

① ع $= -٥٠ \times ٨٠ = -٤٠٠٠$ نيوتن سم

② ع $= -٤٠ \times ١٠٠ = -٤٠٠٠$ نيوتن سم

③ ع $= ٥٠ \times ٦٠ = ٣٠٠٠$ نيوتن سم

④



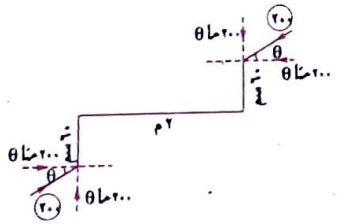
ع $= -٧٠$ جا $٤٥^\circ \times ١٠٠$

$= -٣٥٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن سم

⑤ ع $= -٢٥٠ \times ٠,٨$

$= -٢٠٠$ نيوتن سم

⑥



ع $= ٢٠٠$ جا $\theta \times ١٢٠ - ٢٠٠$ جا $\theta \times ٢٠٠$

$= ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} \times ١٢٠ - ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} \times ٢٠٠$

$= -١٧٦٠٠$ نيوتن سم

٩

∵ ن (د ﻭ س) = ن (د ﻭ هـ حـ)

، ∵ ﻭ هـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$

= ١٣ سم

∴ ما (د ﻭ هـ حـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ ﻭ س = ٧ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{٨٤}{١٣}$

∴ ج = ٣٩ × $\frac{٨٤}{١٣}$ = ٢٥٢ ث.جم.سم

∴ ‖ج‖ = ٢٥٢ ث.جم.سم

١٠

∵ ب ء = ا حـ = ١٨ $\sqrt{٢}$ سم

∴ حـ م = ٩ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $\frac{حـ م}{م هـ}$ = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

∴ م هـ = $\frac{٩\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ = ٣ $\sqrt{٦}$ سم

∴ هـ ﻭ = ٢ م هـ = ٦ $\sqrt{٦}$ سم

∴ ﻭ ب = ﻭ هـ ما ٦٠ = ٦ $\sqrt{٦}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ج = − ١٠ × ٩ $\sqrt{٢}$ = − ٩٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم.سم

∴ ‖ج‖ = ٩٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم.سم

حل آخر :

∵ ا حـ = ١٨ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ Δ ا ب حـ

قائم الزاوية فى ب

، ن (د ا حـ ب) = ٣٠°

∴ ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا حـ = ٩ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ج = − ١٠ × ٩ $\sqrt{٢}$ = − ٩٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم.سم

∴ ‖ج‖ = ٩٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم.سم

١١

∵ م منتصف $\overline{أحـ}$

∴ س منتصف $\overline{حـ ص}$ ، $\overline{حـ س} \perp \overline{ء ب}$

∴ حـ س = $\frac{٥ \times ١٢}{١٣}$ = $\frac{٦٠}{١٣}$ ∴ حـ ص = $\frac{١٢٠}{١٣}$

ج = ٣٩ × $\frac{١٢٠}{١٣}$ = ٣٦٠ نيوتن.سم

∴ ‖ج‖ = ٣٦٠ نيوتن.سم

١٢

∵ هـ ﻭ = ٢ م هـ

= ٢ × ٧ ما ٣٠°

= ٢ × ٧ × $\frac{١}{٢}$

= ٧ سم

ج = ٥٠ × ٧ = ٣٥٠ ث.جم.سم

∴ ‖ج‖ = ٣٥٠ ث.جم.سم

١٣

ء ا = ٢ ل = ٢٠

فى Δ ء س هـ :

∵ ن (د ء هـ س) = ٣٠°

∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ل = ٥ سم

∴ ا س = ١٥ سم

∴ ج = ٨ × ١٥ = ١٢٠ نيوتن.سم

∴ ‖ج‖ = ١٢٠ نيوتن.سم

١٥

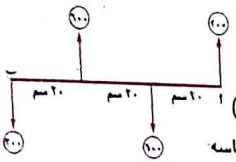
① ج = ٤٠ × ٤ = ١٦٠ نيوتن.سم

② ∵ س = ص = ٦ سم

∴ الشكل يصبح مربع قطره ٦ $\sqrt{٢}$ سم

ثانيا تمارين على الزاى حسم تحت تأثير أزواجس أو أكثر - تكافؤ أزواجان

١

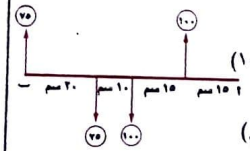


فى شكل (١) :

القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = ٢٠٠ × ٦٠ = ١٢٠٠٠ وحدة عزم

القوتان (٦٠٠ ، ٦٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = − ٦٠٠ × ٢٠ = − ١٢٠٠٠ وحدة عزم

∴ ج١ = − ج٢ ∴ الجسم متزن.



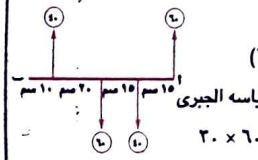
فى شكل (٢) :

القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = ١٠٠ × ١٥ = ١٥٠٠ وحدة عزم

القوتان (٧٥ ، ٧٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث :

ج٢ = − ٧٥ × ٢٠ = − ١٥٠٠ وحدة عزم

∴ ج١ = − ج٢ ∴ الجسم متزن.



فى شكل (٣) :

القوتان (٦٠ ، ٦٠) يكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = ٦٠ × ٣٠

= ١٨٠٠ وحدة عزم

القوتان (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = − ٤٠ × ٣٥ = − ١٤٠٠ وحدة عزم

∴ ج١ ≠ − ج٢

∴ الجسم غير متزن.

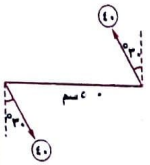
؟

، ∵ θ = ٤٥°

∴ ج = ٤٠ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٢٤٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.سم

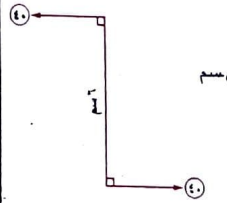
④ ج = ٤٠ × ٥ ما ٦٠°

= ١٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

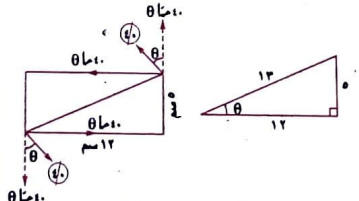


④ ج = ٤٠ × ٦

= ٢٤٠ نيوتن.سم



⑤



ج = ٤٠ ما θ × ١٢ + ٤٠ ما θ × ٥

= ٤٠ × $\frac{١٢}{١٣}$ × ١٢ + ٤٠ × $\frac{٥}{١٣}$ × ٥

= ٥٢٠ نيوتن.سم.

١٥

① البُعد العمودى = ٤٠ ما ٣٠° = ٢٠ سم

∴ ج = − ٥٠ × ٢٠ = − ١٠٠٠ نيوتن.سم.

② ج١ = − ٥٠ × ١٠٠ ما ٣٠° + ٥٠ × ٦٠ ما ٣٠°

= − ١٠٠٠ نيوتن.سم.

٢

القوتان (١٠ ، ١٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج) حيث ج = − ١٠ × ٧ = − ٧٠ نيوتن.م

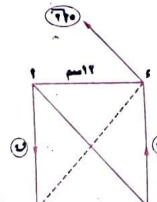
، القوتان (٤٠ $\sqrt{٣}$ ، ٤٠ $\sqrt{٣}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = − ٤٠ $\sqrt{٣}$ × ٢ $\sqrt{٣}$ ما ٦٠°

= − ١٨٠° نيوتن.م

٥

∵ ب ء = ١٢ $\sqrt{٢}$

∵ القوتان (٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ج١



، ∵ ج١ = − ج ∴ ٢٠٠ = ١٠ ن

∴ ن = ٢٠ ث.جم

٨

∵ ب ء = $\sqrt{٢}$

، ء س = ب ء ما ٦٠° = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$



① ن × ١٢ = ٣٢٥

∴ ن = $\frac{١}{١٢}$ ٢٧ ثقل.جم

∴ القوتان مقدار كل منهما $\frac{١}{١٢}$ ٢٧ ثقل.جم



∴ $\frac{1}{2}$ ا ح = $\frac{1}{2}$ × ٩ √٢ = ٩ √٢ سم

∴ ج = −١٠ × ٩ √٢ = −٩٠ √٢ ث.كجم.سم

∴ |ج| = ٩٠ √٢ ث.كجم.سم

① ج = ٤٠ × ٤ = ١٦٠ نيوتن.سم

② ∵ س = ص = ٦ سم

∴ الشكل يصنع مربع قطره ٦ √٢ سم

② ج = −٥٠ × ١٠٠ جا ٣٠° + ٥٠ × ٦٠ جا ٢٠°

= −١٠٠٠ نيوتن.سم.

∴ ج ≠ −ج

∴ الجسم غير متزن.

٢

القوتان (١٠ ، ١٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = −١٠ × ٧ = −٧٠ نيوتن.م

، القوتان (٤٠ √٣ ، ٤٠ √٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = −٤٠ √٣ × ٣ √٣ جا ٦٠°

= −١٨٠° نيوتن.م

، القوتان (٢٥٠ ، ٢٥٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣) حيث ج٣ = ٢٥٠ × ١ = ٢٥٠ نيوتن.م

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = −٧٠ − ١٨٠ + ٢٥٠

= صفر

∴ القضيب متزن.

٣

القوتان (٣٢ ، ٣٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = −٣٢ × ٦ = −١٩٢ نيوتن.سم

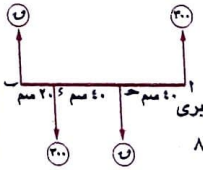
، القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = −٢٠ × ٤,٨ = −٩٦ نيوتن.سم

، القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣) حيث ج٣ = ١٨ × ١٦ = ٢٨٨

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = −١٩٢ − ٩٦ + ٢٨٨ = ٠

∴ المجموعة متزنة.

٤



القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = ٣٠٠ × ٨٠

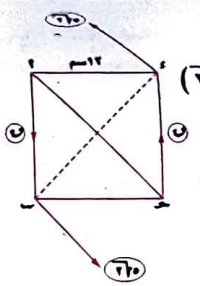
= ٢٤٠٠٠ نيوتن.سم

القوتان (ن ، ن) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = −ن × ٦٠ = −٦٠ ن

∵ القضيب متزن ∴ ج١ = −ج٢

∴ ٢٤٠٠٠ = ٦٠ ن ∴ ن = ٤٠٠ نيوتن

٥



∵ ب ء = ١٢ √٢

∵ القوتان (٥ √٢ ، ٥ √٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ج١

∴ ج١ = ٥ √٢ × ١٢ √٢

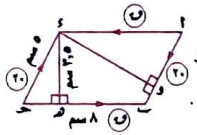
= ١٢٠ ث.جم.سم

، ∵ ج١ = ج

∴ ج = ١٢٠ ث.جم.سم ∴ ١٢ ن = ١٢٠

∴ ن = ١٠ ث.جم ∴ القوتان ١٠ ، ١٠ ث.جم

٦



∵ ب ح × ء و = ا ب × ء و

∴ ٨ × ٣,٥ = ٥ × ء و

ء و = ٥,٦ سم

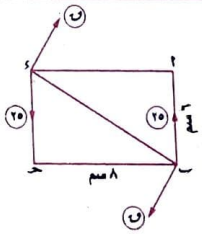
∵ القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = −٢٠ × ٥,٦ = −١١٢ نيوتن.سم

القوتان (ن ، ن) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = ن × ٣,٥ = ٣,٥ ن

∵ ج١ = −ج٢ ∴ −١١٢ = −٣,٥ ن

∴ ن = ٣٢ نيوتن.

٧



القوتان (٢٥ ، ٢٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث

ج١ = ٢٥ × ٨

= ٢٠٠ ث.جم.سم

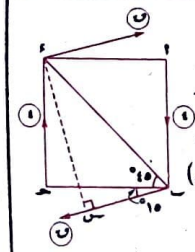
القوتان (ن ، ن) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

، ∵ ب ء = ١٠ سم ج٢ = −ن × ١٠ = −١٠ ن

∴ ج١ = −ج٢ ∴ −٢٠٠ = −١٠ ن

∴ ن = ٢٠ ث.جم

٨



∵ ب ء = √٢

، ء س = ب ء جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

، ∵ القوتان (٤ ، ٤) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

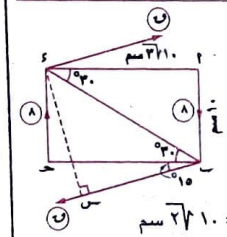
∴ ج١ = ٤ × ١

= ٤ ث.كجم.متر

، ∵ ج١ = ج ∴ ج = −ن × $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

∴ −٤ = −ن × $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ∴ ن = $\frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$

٩



∵ ن (∠ ا ء ب) = ٣٠°

، ا ب = ١٠ سم

∴ ب ء = ٢٠ سم

، ا ء = ١٠ √٣ سم

∴ ء س = ٢٠ جا ٤٥° = ١٠ √٢ سم

∵ القوتان (٨ ، ٨) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = −٨ × ١٠ √٣ = −٨٠ √٣ نيوتن.سم

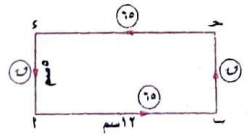
، ∵ ج١ = ج ∴ ج = −٨٠ √٣

−٨٠ √٣ = −ن × ١٠ √٢ ∴ ن = ٤ √٦ نيوتن

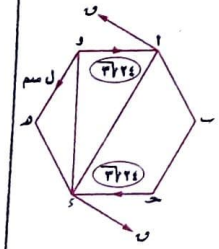
١٠

∵ القوتان (٦٥ ، ٦٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٦٥ × ٥ = ٣٢٥ ث.جم.سم



١١



من خواص المسدس :

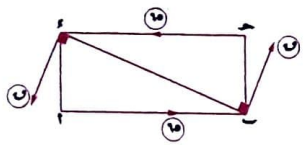
و ء = √٣ ل ، ا ء = ٢ ل

القوتان (٢٤ √٣ ، ٢٤ √٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث

① ن × ١٢ = ٣٢٥

∴ ن = $\frac{١}{١٢}$ ٢٧ ثقل.جم

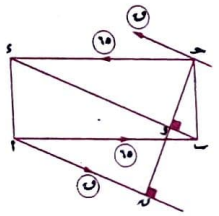
∴ القوتان مقدار كل منهما $\frac{١}{١٢}$ ٢٧ ثقل.جم



② ب ء = √(٥)٢ + (١٢)٢ = ١٣ سم

∴ ن × ١٣ = ٣٢٥ ∴ ن = ٢٥ ثقل.جم

∴ القوتان مقدار كل منهما ٢٥ ثقل.جم



③ نرسم ح د ⊥ خط عمل ن عند ا

فيقطع ب ء فى و فيكون :

ح د = ٢ ح و = ٢ × $\frac{ب ح \times ح ء}{ب ء}$

= ٢ × $\frac{١٢ \times ٥}{١٣}$ = $\frac{١٢٠}{١٣}$ سم

∴ ن × $\frac{١٢٠}{١٣}$ = ٣٢٥

∴ ن = $\frac{٥}{٢٤}$ ٣٥ ثقل.جم

والقوة عند ا فى اتجاه $\overleftarrow{ء ب}$ وعند ح فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$

$ج_1 = -٢٤\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$ ل $= -٧٢$ ل نيوتن. سم

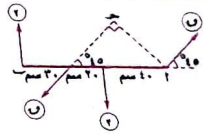
∵ القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$) حيث $ج = ب \times ٢ ل = ٢$ ب ل

∵ $ج_1 = -ج$ ، -٧٢ ل $= -٢$ ب ل

∴ ب $= ٣٦$ نيوتن.

١٤ ① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ) ⑦ أولًا : (ب) ثانيًا : (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

١٣



$ا حـ = ٦٠$ جا $٤٥° = ٣٠\sqrt{٢}$ سم

القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

حيث $ج_1 = -٢ \times ٥٠ = -١٠٠$ ث.جم.سم

القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

حيث $ج_2 = ب \times ٣٠ = ٣٠\sqrt{٢}$ ب

∵ $ج_1 = -ج_2$ ∴ $-١٠٠ = -٣٠\sqrt{٢}$ ب

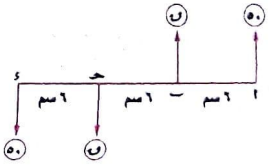
∴ ب $= \frac{١٠٠\sqrt{٢}}{٣}$ ث.جم

١٤

∵ القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

∴ $ج_1 = ٥٠ \times ١٨ = ٩٠٠$ ث.جم.سم

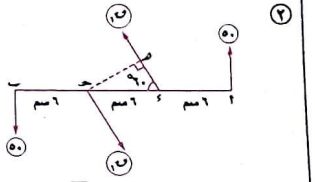
①



٦ ب $= ٩٠٠$ ∴ ب $= ١٥٠$

∴ القوتان ١٥٠ ، ١٥٠ ث.جم

②



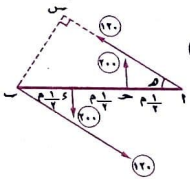
∵ حـ هـ $= ٦$ جا $٦٠° = ٣\sqrt{٣}$

∴ ب $\sqrt{١} \times ٣\sqrt{٣} = ٩٠٠$

∴ ب $\sqrt{١} = ١٠٠\sqrt{٣}$

∴ القوتان $١٠٠\sqrt{٣}$ ، $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

١٥



∵ القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

∴ $ج_1 = ٢٠٠ \times \frac{١}{٢}$

$= ١٠٠$ نيوتن.متر

∵ القوتان (١٢٠ ، ١٢٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

∴ $ج_2 = ١٢٠ \times$ ب س $= ١٢٠ \times ا ب$ جا هـ

$= ١٢٠ \times ١,٥$ جا هـ

∵ $ج_1 = ج_2$

∴ $١٢٠ \times ١,٥$ جا هـ $= ١٠٠$

∴ جا هـ $= \frac{٥}{٩}$ ∴ ق (د هـ) $= ٣٣\frac{١}{٢}°$

١٦

القوتان (٥٠٠ ، ٥٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث $ج_1 = ٥٠٠ \times ٥ = ٢٥٠٠$ نيوتن.سم

، القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

($ج_2$) حيث $ج_2 = ب \times ٦ = ٦$ ب نيوتن.سم

، القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

($ج_3$) حيث $ج_3 = -$ ب $\times ٤,٨ = -٤,٨$ ب نيوتن.سم

∵ المجموعة متزنة ∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3 =$ صفر

$-٤٨ + ٦$ ب $- ٤,٨$ ب $= ٠$

∴ $١,٢$ ب $= ٤٨$ ∴ ب $= ٤٠$ نيوتن.

١٧

من خواص المسدس :

ب ء $=$ ب و $=$ و ء $= ٣\sqrt{٣}$ ل

القوتان (٩ ، ٩) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

حيث $ج_1 = -٩ \times \sqrt{٣} ٣$ ل $= -٩\sqrt{٣} ٣$ ل نيوتن.سم

، القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$) حيث $ج_2 = -٣ \times \sqrt{٣} ٣$ ل $= -٣\sqrt{٣} ٣$ ل نيوتن.سم

، القوتان (ب ، ب) حيث (ب $=$ ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_3$) حيث

$ج_3 =$ ب $\sqrt{١} \times ٣\sqrt{٣}$ ل $= ٣\sqrt{٣}$ ب ل نيوتن.سم

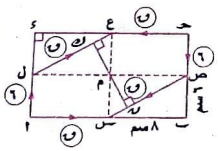
∵ المجموعة متزنة ∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3 = ٠$

∴ $-٩\sqrt{٣} ٣$ ل $- ٣\sqrt{٣} ٣$ ل $+ ٣\sqrt{٣}$ ب ل $= ٠$

∴ ب $= ١٢$ نيوتن.

١٨

من هندسة الشكل :



م ن $= \frac{٤ \times ٣}{٥}$

$= ٢,٤$ سم

، ن ل $= ٤,٨$ سم

القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

حيث $ج_1 = -٦ \times ٨ = -٤٨$ نيوتن.سم

، القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$) حيث $ج_2 =$ ب $\times ٦ = ٦$ ب نيوتن.سم

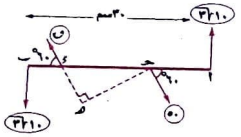
، القوتان (ب ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_3$) حيث $ج_3 = -$ ب $\times ٤,٨ = -٤,٨$ ب نيوتن.سم

∵ المجموعة متزنة ∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3 =$ صفر

$-٤٨ + ٦$ ب $- ٤,٨$ ب $= ٠$

∴ $١,٢$ ب $= ٤٨$ ∴ ب $= ٤٠$ نيوتن.

١٩



القوتان $(١٠\sqrt{٣} ، ١٠\sqrt{٣})$ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث

$ج_1 = ١٠\sqrt{٣} \times ٣٠ = ٣٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم.سم

القوتان (٥٠ ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

∴ ب $= ٥٠$ ث.جم وتؤثر فى نقطة أخرى من القضيب بحيث يوازى خط عملها خط عمل القوة ٥٠ ثقل جم وتضادها فى الاتجاه

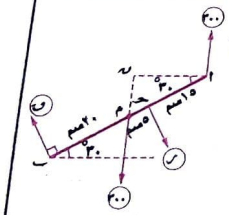
∵ $ج_1 = -ج_2$ $ج_2 = -٥٠ \times$ حـ هـ

∴ $٣٠٠\sqrt{٣} = ٥٠$ حـ هـ ∴ حـ هـ $= ٦\sqrt{٣}$

$٦\sqrt{٣} =$ حـ و جا $٦٠° =$ حـ و $\times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ حـ و $= ١٢$ سم

∴ القوة الرابعة تؤثر فى نقطة على القضيب تبعد عن حـ مسافة ١٢ سم

٢٠



ا ن $= ٢٠$ جا $٣٠° = ١٠\sqrt{٣}$

القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

$ج_1 = ٣٠٠ \times$ ا ن

$= ٣٠٠ \times ١٠\sqrt{٣} = ٣٠٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم.سم

∴ القوتان (ر ، ب) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

∴ ر $=$ ب ، وذراع العزم $=$ ب حـ $= ٢٥$ سم

، ∵ $ج_1 = -ج_2$

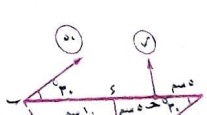
$٣٠٠٠\sqrt{٣} = ٢٥$ ب ∴ ب $= ١٢٠\sqrt{٣}$ ث.جم

∴ ر $= ١٢٠\sqrt{٣}$ ث.جم عند حـ عموديًا على ا ب لأسفل.

٢١

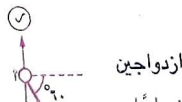
∵ ب هـ $= ٢٠$ جا $٣٠°$

$= ١٠$ سم



٢٤

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين



∵ أ ء $= ١٥$ جا $٦٠° = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$

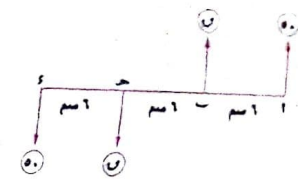
∴ $ج_1 = -ج_2 = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢} \times$ ا ء

٢٨

∵ القضيب متزن



∴ $ج_1 = ٥٠ \times ١٨ = ٩٠٠$ ث.جم



١٦

القوتان (٥٠٠ ، ٥٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

($ج_1$) حيث $ج_1 = ٥٠٠ \times ٥ = ٢٥٠٠$ نيوتن.سم

، القوتان (ن ، ن) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

∴ $ل(د ه) = ٤٥° ٣٣'$ ∴ $ما ه = \frac{٥}{٩}$

($ج_2$)

∴ ن = ن ، وذراع العزم = ب حـ = ٢٥ سم

، ∵ $ج_1 = -ج_2$

∴ ن = $\frac{١٢٠}{٢٥} = \frac{٢٠٠٠}{٢٥}$ ث.جم

∴ ر = ١٢٠ ث.جم عند حـ عموديًا على $\overline{أب}$ لأسفل.

∵ المجموعة متزنة ∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3$ = صفر

$-٤٨ + ٦ن - ٤,٨ن = ٠$

∴ $١,٢ن = ٤٨$ ∴ ن = ٤٠ نيوتن.

٤١

∵ $ل(د ه) = ٣٠°$ ، $ما ه = \frac{١}{٢}$

∴ ب ء = ١٠ سم

القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$)

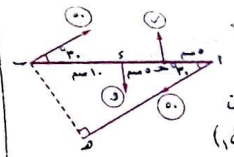
، $ج_1 = -٥٠ \times ١٠ = -٥٠٠$ نيوتن.سم

∴ القوتان (ر ، و) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

∴ ر = و ، ذراع العزم = حـ ء = ٥ سم ، $ج_2 = ٥$ و

∵ $ج_1 = -ج_2$ ∴ $-٥٠٠ = -٥$ و

∴ ن = ر = ١٠٠ نيوتن



٤٢

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٢٠ ، ر)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ٢٥٠٠$ نيوتن.سم

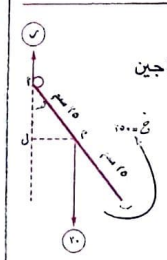
∴ ر = ٢٠ نيوتن رأسيًا لأعلى

، $-٢٠ \times م ل = -٢٥٠$

∴ م ل = ١٢,٥

∴ $ما ه = \frac{١٢,٥}{١٢,٥} = \frac{١}{٢}$ ∴ $ه = ٢٠°$ أو $١٥٠°$

∴ القضيب يميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها $٢٠°$ أو $١٥٠°$



٤٣

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (و ، ر) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

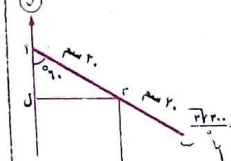
$ج_1 = -٢٠٠\sqrt{٣}$

ثقل الجسم المتزن $= \frac{-٢٠٠\sqrt{٣}}{٥}$ ثقل الكجم.سم

∴ ر × م ل $= \frac{-٢٠٠\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ر × $٢٠ ما ٦٠° = \frac{-٢٠٠\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ر = و = ١٠ ث.كجم



٤٤

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٥ ، ر) تكونان ازدواجًا

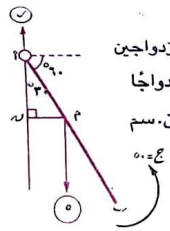
قياسه الجبرى = − ٥٠ نيوتن.سم

∴ ر = ٥ رأسيًا لأعلى

، − ٥ × م ه = − ٥٠

∴ م ه = ١٠ سم

∴ م أ = ٢٠ سم ∴ أ ب = ٤٠ سم



٤٥

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∵ القوتان (١٠ ، ر) تكونان ازدواجًا

قياسه الجبرى = − ١٥٠ ث.كجم.سم

∴ ر = ١٠ رأسيًا لأعلى

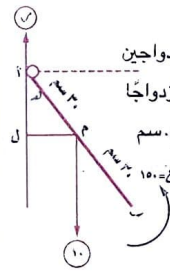
∴ − ١٠ × م ل = − ١٥٠

∴ م ل = ١٥ سم

∴ $ما ه = \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ق (د ه) = $٣٠°$ أو $١٥٠°$

∴ قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى = $٦٠°$ لأعلى أو لأسفل.



٤٦

∵ ر = ١٨ نيوتن

∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

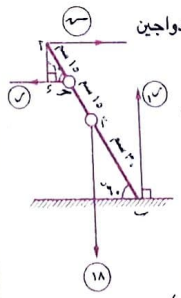
∴ القوتان (ر ، ١٨)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث

$ج_1 = ١٨ \times ٢٠ ما ٦٠°$

= ٢٧٠ نيوتن.سم

∴ القوتان (ر ، ر) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)



٤٧

أولاً :

القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ $ر_1 + ر_2 = ٢$ (١)

، $ر_1 \times ٣٠ = ر_2 \times ٥٠$

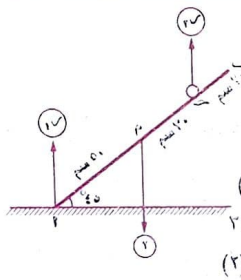
∴ $ر_1 = \frac{٥}{٣} ر_2$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ر_1 + \frac{٥}{٣} ر_1 = ٢$

∴ $ر_1 = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$ نيوتن

، $ر_2 = \frac{٥}{٤} = ١,٢٥$ نيوتن

∴ $ر_1$ (رد فعل النضد) = ٠,٧٥ نيوتن.



ثانيًا :

القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث

$ج_1 = -٢٠ \times ٥٠ ما ٤٥° = -٥٠\sqrt{٢}$

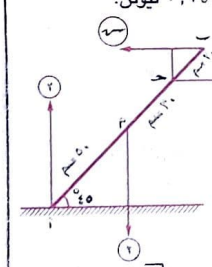
، القوتان (ر ، $ر_2$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

حيث ($ج_1$) = ر × ٢٠ ما ٤٥°

، ∵ $ج_1 = -ج_2$

∴ $-٥٠\sqrt{٢} = -$ ر × ١٠

∴ ر = ٥ نيوتن ، $ر_2$ = ٥ نيوتن.



٤٨

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ $ر_1 + ر_2 = ٧٥$ (١)

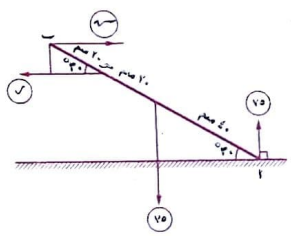
، $ر_1 \times ٤٠ = ر_2 \times ٢٠$ ∴ $ر_1 = ٢ ر_2$ (٢)

∴ $ر_1 + ٢ ر_1 = ٧٥$ ∴ $٣ ر_1 = ٧٥$

∴ $ر_1 = ٢٥$ نيوتن

، $ر_2 = ٥٠$ نيوتن وكل منهما رأسيًا لأعلى

(١) إذا كان الحبل أفقيًا :



∴ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٧٥ ، ٧٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث

$ج_1 = ٧٥ \times ٤٠ ما ٣٠° = ١٥٠٠\sqrt{٣}$

∴ القوتان (ر ، ر) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

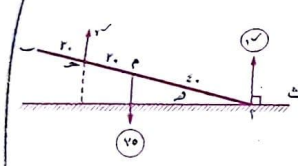
∴ ر = ر وكل منهما أفقى

، ذراع العزم = ٢٠ ما $٣٠° = ١٠$ سم

∴ $ج_2 = -$ ر × ١٠ ∵ $ج_1 = -ج_2$

∴ $١٥٠٠\sqrt{٣} = ١٠$ ر

∴ ر = $١٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن ، ر = $١٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن.



(٢) إذا كان الحبل رأسيًا :

∵ $ج_1 = ١٥٠٠\sqrt{٣}$

∴ ش = س

وكل منهما رأسيًا

، $ج = -سـ \times ١٠\sqrt{٣}$

$١٠\sqrt{٣}\ سـ = ١٥٠٠\sqrt{٣}$

∴ سـ = ١٥٠ نيوتن ، س = ١٥٠ نيوتن

(٣) إذا كان الحبل عموديًا على القضيب :

$ج_1 = ١٥٠٠\sqrt{٣}$

، ش = س

وكل منهما عمودى على القضيب

، $ج = -٢٠\ سـ$

∴ $ج_1 = -ج$

$١٥٠٠ = ٢٠\ سـ$

$سـ = ٧٥\sqrt{٣}$ نيوتن ، $س = ٧٥\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٩

∵ ء ا = ١٨

∴ ا م = ١٢

، ∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواج

والقوتان (٣٠٠ ، س)

∴ القوتان (٣٠٠ ، س)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى = −١٨٠٠ ثقل جم.سم

∴ س = ٣٠٠ ث.جم

، $-١٨٠٠ = -٣٠٠\ م_{ب}$

∴ $م_{ب} = ٦$ سم

∴ $ظا\theta = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ق (∠د) = ٣٠° أ، ١٥٠°

إذا كان د = ٣٠°

، ∵ ق (∠د ا ح) = ٣٠°

∴ $\overline{ا ح}$ رأسى لأسفل

أى أن : $\overline{ا ب}$ يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وإذا كان د = ١٥٠°

، ∵ ق (∠ء ا ب) = ٣٠°

∴ $\overline{ا ب}$ رأسى لأعلى

أى أن : يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠°

٣٠

$ء ا = \frac{١}{٢}\ ا ب = ١٢$ سم

، ∵ $\overline{ا ب}$ أفقى ، $\overline{ء ح}$ رأسى

∴ القوتان (٥٠٠ ، س)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ س = ٥٠٠ ث.جم

$ج_1 = -٥٠٠ \times ١٢ = -٦٠٠٠$ ث.جم.سم

، ∵ $ج_1 = -ج$ ∴ ج = ٦٠٠٠ ث.جم.سم

٣١

$ء ا = \sqrt{١٦٩ - ٢٥} = ١٢$ سم

∴ ا م = ٨ سم

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (و ، س)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى = −٨٠٠

∴ و = س

، ∵ $\frac{م_{ب}}{٨} = \frac{٥}{١٣}$ ∴ $م_{ب} = \frac{٤٠}{١٣}$

∴ $-٨٠٠ = -و \times \frac{٤٠}{١٣}$

∴ $و = ٨٠٠ \times \frac{١٣}{٤٠} = ٢٦٠$ ث.جم

٣٢

أولًا : $\overline{ا ب}$ رأسيًا :

∵ $\overline{م د} \parallel \overline{ب ح}$

$\frac{ا م}{ء ا} = \frac{م د}{ء ب}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{م د}{٦}$

∴ م د = ٤ سم

∴ القوتان (٢٠٠ ، س) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج)

∴ ج = −٢٠٠ × ٤ = −٨٠٠ ث.جم.سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل $\overline{ا ب}$ رأسيًا = −٨٠٠ ث.جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٨٠٠ ث.جم.سم

ثانيًا : $\overline{ا ب}$ أفقيًا :

∵ $\overline{د م} \parallel \overline{ء ب}$

∴ $\frac{ا د}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ ا د = ٦ سم

∵ الصفيحة متزنة

∴ القوتان (٢٠٠ ، س)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج)

∴ ج = −٢٠٠ × ٦ = −١٢٠٠

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل $\overline{ا ب}$ أفقيًا = −١٢٠٠ ث.جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٢٠٠ ث.جم.سم

ثالثًا : عند التعليق فى ح :

∵ $\overline{م د} \parallel \overline{ب ء}$

∴ $\frac{ه ب}{ا ب} = \frac{م ء}{ا ء}$

∴ $\frac{ه ب}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ ه ب = ٣ سم

٣٣

∵ ا ب = ٥٠ سم

∴ ا ح = $٥٠\sqrt{٢}$

، ا م = $٢٥\sqrt{٢}$

، م ه = ا م ﻣا ه

$= ٢٥\sqrt{٢}$ ﻣا ه

، ∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٣٠٠ ، س)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى = −٧٥٠٠

∴ $-٣٠٠ \times م_{ه} = -٧٥٠٠$

∴ $-٣٠٠ \times ٢٥\sqrt{٢}$ ﻣا ه = −٧٥٠٠

∴ $ﻣا ه = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ∴ ق (∠د) = ٤٥° أ، ١٣٥°

∴ $\overline{ا ح}$ يميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها ٤٥° أ، ١٣٥°

٣٤

ا ح = $٨٠\sqrt{٢}$

∴ ا م = $٤٠\sqrt{٢}$

، ∵ ق (∠د م ا ه) = ٣٠°

∴ $م_{ه} = ٢٠\sqrt{٢}$

، ∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (٢٥٠ ، س) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٢٥٠ \times ٢٠\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = -٥٠٠٠$ ثقل جم.سم

∴ عزم الازدواج الذى يجعل $\overline{ا ح}$ يميل على الرأسى بزاوية ٣٠° قياسه الجبرى = $٥٠٠٠\sqrt{٢}$ ثقل جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = $٥٠٠٠\sqrt{٢}$ ثقل جم.سم

④ ∵ القوتان ($س_1$ ، $س_1$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث $ج_1 = س_1 \times ل$

، القوتان ($س_2$ ، $س_2$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$) حيث $ج_2 = -س_2 \times ل \times \theta$

$-١٥٠ = -٢٠ \times م_{ه}$ ∴ $-١٥٠ = -٢٠ \times ١٥$ ﻣا ه

∴ $ﻣا ه = \frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠د) = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ قياس زاوية ميل $\overline{ء ب}$ على الرأسى لأسفل يساوى

، القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$) حيث $ج_2 = ٣٠٠ \times$

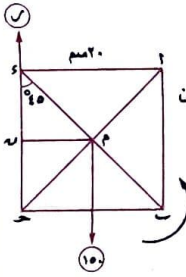
$= ٠٫٠٠٥$

$= ١٫٥$ نيوتن.م

∴ جزء الازدواج الذى يجعل $\overline{أحـ}$ يميل على الرأسى بزاوية ٣٠° قياسه الجبرى = ٥٠٠٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٥٠٠٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جم.سم

٣٥



• **فى الحالة الأولى :**

الصفحية متزنة تحت تأثير قوتين

∴ الضغط على المسمار = وزن الصفيحة = ١٥٠ نيوتن

• **فى الحالة الثانية :**

∵ ء م = ١٠ $\sqrt{٢}$

∴ م هـ = م ء جا ٤٥° = ١٠ سم

، ∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

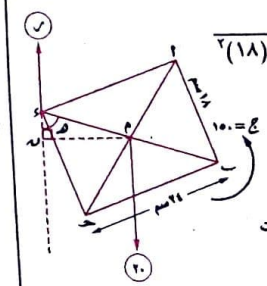
∴ القوتان (١٥٠ ، ر) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

= −١٥٠ × م هـ = −١٥٠ × ١٠ = −١٥٠٠ نيوتن.سم

∴ عزم الازدواج الذى يجعل $\overline{أء}$ أفقى قياسه الجبرى = ١٥٠٠ نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٥٠٠ نيوتن.سم

٣٦



∵ ء ب = $\sqrt{(٢٤)^٢ + (١٨)^٢}$

= ٣٠ سم

∴ م ء = ١٥

∴ م هـ = ١٥ جا هـ

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (ر ، ٢٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

= −١٥٠ نيوتن.سم

∴ −١٥٠ = −٢٠ × م هـ ∴ −١٥٠ = −٢٠ × ١٥ جا هـ

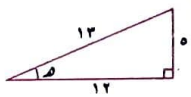
∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (د هـ) = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ قياس زاوية ميل $\overline{ب ء}$ على الرأسى لأسفل يساوى ٣٠° أ، ١٥٠°

٣٧

① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب)

إرشادات لحل رقم ٣٧ :



① ∵ جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ (موجبة)

∴ هـ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ جتا هـ = ± $\frac{١٢}{١٣}$

∴ $\overrightarrow{ق_١}$ = (١٣ جتا هـ ، ١٣ جا هـ)

= (١٢ ، ٥) أ، (−١٢ ، ٥)

، ∵ $\overrightarrow{ق_٢}$ = − $\overrightarrow{ق_١}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ = (−١٢ ، −٥) أ، (١٢ ، −٥)

∴ أ = −١٢ ، ب = −٥ ومنها أ + ب = −١٧

أ، أ = ١٢ ، ب = −٥ ومنها أ + ب = ٧

② بفرض أن معيار أحد القوتين = ق

، المسافة العمودية بين القوتين = ل

∴ $\overrightarrow{ج_١}$ = ق × ل

، $\overrightarrow{ج_٢}$ = ٢ ق × $\frac{١}{٢}$ ل = ق × ل = $\overrightarrow{ج_١}$

③ ∵ القوتان ($\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = − $\overrightarrow{ق_١}$ × ٧ = −٧ $\overrightarrow{ق_١}$

، القوتان ($\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = $\overrightarrow{ق_٣}$ × ٣ = ٣ $\overrightarrow{ق_٣}$

، ∵ المجموعة متزنة ∴ $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ = صفر

∴ ٣ $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٧ $\overrightarrow{ق_١}$ ∴ $\overrightarrow{ق_١}$ = $\frac{٣}{٧}$ $\overrightarrow{ق_٣}$

∴ $\overrightarrow{ق_٣}$ > $\overrightarrow{ق_١}$

④ ∵ القوتان ($\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = $\overrightarrow{ق_٢}$ × ل

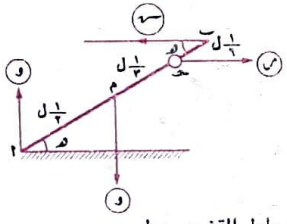
، القوتان ($\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = − $\overrightarrow{ق_٣}$ × ل جا θ

، ∵ المجموعة متزنة ∴ $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ = صفر

∴ $\overrightarrow{ق_١}$ × ل = $\overrightarrow{ق_٣}$ × ل جا θ

∴ $\overrightarrow{ق_١}$ = $\overrightarrow{ق_٣}$ جا θ ∴ $\overrightarrow{ق_١}$ < $\overrightarrow{ق_٣}$

٣٨



نفرض أن طول القضيب = ل سم

∵ القوتان (و ، و) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$)

حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = − و × $\frac{١}{٢}$ ل جتا هـ = − $\frac{١}{٢}$ و ل جتا هـ ثقل.كجم سم

، ∵ القضيب متزن

∴ القوتان (سـ ، ر) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث رد فعل المسمار (ر) = سـ أفقيًا فى اتجاه مضاد لاتجاه سـ

، $\overrightarrow{ج_٢}$ = سـ × ب حـ جا هـ = سـ × $\frac{١}{٢}$ ل جا هـ

= $\frac{١}{٢}$ ل سـ جا هـ

∵ $\overrightarrow{ج_٢}$ = − $\overrightarrow{ج_١}$

∴ $\frac{١}{٢}$ ل سـ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ و ل جتا هـ

∴ ش = ٣ و $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ = ٣ و ظتا هـ ثقل.كجم

إجابات تمارين ٩

١

① القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = − ٤٠٠ × ٢ = − ٨٠٠ نيوتن.م

، القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = ٣٠٠ × ٠,٠٠٥

= ١,٥ نيوتن.م

، ج = $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ = − ٨٠٠ + ١,٥

= − ٧٩٨,٥ نيوتن.م

② القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = − ١٠٠ × ٤

= − ٤٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = ٢٠٠ × ٨٠

= ١٦٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (٥٠٠ ، ٥٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٣}$) حيث $\overrightarrow{ج_٣}$ = − ٥٠٠ × ٢٣٠

= − ١١٥٠٠٠ نيوتن.سم

∴ ج = $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ + $\overrightarrow{ج_٣}$ = − ٩٩٤٠٠ نيوتن.سم

③ القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = − ٤٠٠ × ٢ = − ٨٠٠ نيوتن.م

، القوتان (٧٠٠ ، ٧٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = − ٧٠٠ × ١ = − ٧٠٠ نيوتن.م

، القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواج قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٣}$) حيث $\overrightarrow{ج_٣}$ = ٣٠٠ × $\sqrt{٣}$

= ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.م

∴ ج = $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ + $\overrightarrow{ج_٣}$ ≈ − ٩٨٠,٣٨ نيوتن.م

④ القوتان (٨٠ ، ٨٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_١}$) حيث $\overrightarrow{ج_١}$ = ٨٠ × ٢ = ١٦٠ نيوتن.م

، القوتان (١٥٠ ، ١٥٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٢}$) حيث $\overrightarrow{ج_٢}$ = ١٥٠ × ٢ = ٣٠٠ نيوتن.م

، القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($\overrightarrow{ج_٣}$) حيث $\overrightarrow{ج_٣}$ = ١٠٠ × ٢ = ٢٠٠ نيوتن.م

∴ ج = $\overrightarrow{ج_١}$ + $\overrightarrow{ج_٢}$ + $\overrightarrow{ج_٣}$ = ١٦٠ + ٣٠٠ + ٢٠٠

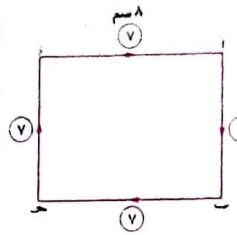
= ٦٦٠ نيوتن.م

٢

∵ القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى $\overline{\text{أ}}$ (ج١)

∴ ج١ = −٧ × ٨

= −٥٦ ث.كجم.سم



∴ القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = − − ٧ × ٦ = −٤٢ ث.كجم.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى (ج)

∴ ج = ج١ + ج٢ = −٥٦ − ٤٢ = −٩٨ ث.كجم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٩٨ ث.كجم.سم

٣

∵ القوتين (٣ ، ٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٣ × ٢٠

= ٦٠ ث.كجم.سم

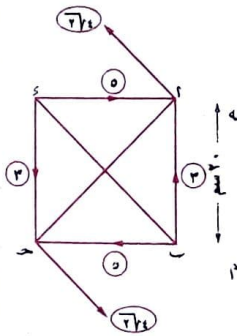
∵ القوتين (٥ ، ٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = −٥ × ٢٠ = −١٠٠ ث.كجم.سم

∵ القوتان (٤ √٢ ، ٤ √٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣)

∴ ج٣ = ٤ × √٢ × ٢٠ = ١٦٠ √٢ ث.كجم.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = ١٢٠ ث.كجم.سم



٤

∵ ء هـ = ٦ ما ٦٠°

= ٣ √٣ سم

، ء و = ٨ ما ٦٠° = ٤ √٣ سم

∵ القوتين (١٠ ، ١٠) تكونان ازداوجًا قياسه الجبرى (ج١)

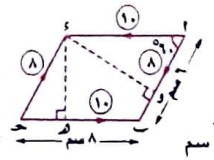
∴ ج١ = ١٠ × ٣ √٣ = ٣٠ √٣ نيوتن.سم

∵ القوتين (٨ ، ٨) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = −٨ × ٤ √٣ = −٣٢ √٣ نيوتن.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ = −٢ √٣ نيوتن.سم

∴ ‖ج‖ = ٢ √٣ نيوتن.سم



٥

∵ ٦ × ء و

= ١٠ × ٤,٥

∴ ء و = ٧,٥ سم

∵ القوتين (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ١٥ × ٤,٥ = ٦٧,٥ ث.كجم.سم

∵ القوتين (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = −١٢ × ٧,٥ = −٩٠ ث.كجم.سم

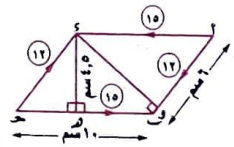
① ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = ٦٧,٥ − ٩٠ − ٧٢,٥

= −٩٥ ث.كجم.سم

∴ معيار العزم = ٩٥ ث.كجم.سم

② ج = ٦٧,٥ + ٩٠ − ٧٢,٥ = ٥٠ ث.كجم.سم

∴ معيار العزم = ٥٠ ث.كجم.سم



٦

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (أ)

٧

حـ س = √(١٤٤ + ٢٥)

= ١٣ سم

، ص ل = ٥ ما هـ

= ٥ × ١٢/١٣ = ٦٠/١٣ سم

∵ القوتين (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٢٠٠ × ١٠ = ٢٠٠٠ ث.جم.سم

∵ القوتين (١٨٠ ، ١٨٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = −١٨٠ × ١٢ = −٢١٦٠ ث.جم.سم

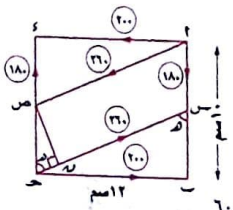
∵ القوتان (٢٦٠ ، ٢٦٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣)

∴ ج٣ = ٦٠/١٣ × ٢٦٠ = ١٢٠٠ ث.جم.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = ٢٠٠٠ − ٢١٦٠ + ١٢٠٠

= ١٠٤٠ ث.جم.سم

∴ معيار العزم = ١٠٤٠ ث.جم.سم



٨

∵ القوتين (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٤٠ × ١٥ √٣

= ٦٠٠ √٣ نيوتن.سم

∵ القوتين (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

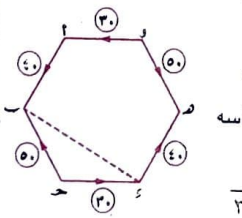
∴ ج٢ = −٥٠ × ١٥ √٣ = −٧٥٠ √٣ نيوتن.سم

∵ القوتين (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣)

∴ ج٣ = ٣٠ × ١٥ √٣ = ٤٥٠ √٣ نيوتن.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = ٣٠٠ √٣ نيوتن.سم

∴ معيار العزم = ٣٠٠ √٣ نيوتن.سم



٩

① القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١) حيث ج١ = ٧ × ١٠ = ٧٠ نيوتن.سم

② القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢) حيث ج٢ = −٥ × ١٦ ما ٦٠°

= −٤٠ √٣ نيوتن.سم

③ ∵ ج١ + ج٢ = ٣٠

∴ ٧٠ − ٥ × ١٦ ما θ = ٣٠

∴ ما θ = ١/٢ ∴ θ = ٣٠°

④ ∵ الصفيحة متزنة

∴ ج١ = − ج٢ ∴ ٧٠ = ٥ × ١٦ ما θ

∴ ما θ = ٧/٨ ∴ θ = ٦١° ٢٤′

١٠

∵ القوتان (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٤٠ × ١٦

= ٦٤٠ ث.جم.سم

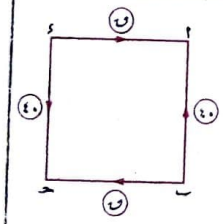
∵ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = − ق × ١٦ = −١٦ ق ث.جم.سم

ج = ج١ + ج٢ ∴ ٤٨٠ = ٦٤٠ − ١٦ ق

∴ ١٦ ق = ٦٤٠ − ٤٨٠ = ١٦٠

∴ ق = ١٠ ث.جم



∴ معيار العزم = ٥٠ ث.كجم.سم

٦

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (أ)

∴ القوتين (٢٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

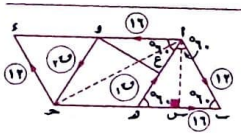
∴ جـ١ = ٤ × ٢٠ = ٨٠ ث.كجم.سم

∴ جـ = جـ١ + جـ٢ = ١٢٠ ث.كجم.سم

∴ ق = ق١ = ق٢ = ٦ نيوتن

∴ القوتان ٦ ، ٦ نيوتن.

١٢



أ س = ٤ ما ٦٠°

= ٢√٣

∴ القوتين (١٦ ، ١٦)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = ١٦ × ٢√٣ = ٣٢√٣ ث.جم.سم

∵ فى Δ أ ب حـ وفى هندسة الشكل

∴ حـ أ ⊥ أ ب ∴ حـ أ = ٨ ما ٦٠° = ٤√٣

∴ القوتين (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

∴ جـ٢ = -١٢ × ٤√٣ = -٤٨√٣ ث.جم.سم

∵ و ع = ٤ ما ٦٠° = ٢√٣

∵ المجموعة متزنة

∴ القوتان (ق١ ، ق٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

∴ ق١ = ق٢ ، جـ٢ = ق١ × ٢√٣

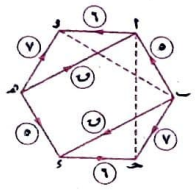
، جـ١ + جـ٢ + جـ٣ = صفر

∴ ٣٢√٣ - ٤٨√٣ + ٢√٣ ق١ = صفر

٢√٣ ق١ = ١٦ ∴ ق١ = ٨ ث.جم

∴ ق٣ = ق٤ = ٨ ث.جم

١٣



∵ أ حـ = ب ء = ب و

= ١٠√٣

∵ القوتين (٦ ، ٦)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = ٦ × ١٠√٣ = ٦٠√٣ ث.كجم.سم

∵ القوتين (٥ ، ٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

∴ جـ٢ = ٥ × ١٠√٣ = ٥٠√٣ ث.كجم.سم

∵ القوتين (٧ ، ٧) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٣)

∴ جـ٣ = -٧ × ١٠√٣ = -٧٠√٣ ث.كجم.سم

∴ جـ = جـ١ + جـ٢ + جـ٣ = ٤٠√٣ ث.كجم.سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يتزن على المجموعة = -٤٠√٣ ث.كجم.سم

∴ -ق × ١٠ = -٤٠√٣

∴ ق = ٤√٣ ثقل.كجم

∴ الازدواج الذى يتزن مع المجموعة مقدار كل من قوتيه ٤√٣ ثقل.كجم وإحداهما تعمل فى $\overleftarrow{أ د}$ والأخرى فى $\overleftarrow{ء ب}$

∵ القوتين (٢٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = -٣٠ × ٣٠

= -٩٠٠ نيوتن.سم

∵ القوتين (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

∴ جـ٢ = ١٥ × ٤٠ = ٦٠٠ نيوتن.سم

∴ جـ = جـ١ + جـ٢ = -٣٠٠ نيوتن.سم

∵ شرط التوازن جـ = -جـ ∴ ق × ٥٠ = ٣٠٠

∴ م منتصف $\overline{أ حـ}$

، ∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{حـ ب}$

∴ د منتصف $\overline{أ ب}$

، أ د = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

∴ أ س = ٩,٦

∴ القوتان (٥٠٠ ، ٥٠٠)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = ٥٠٠ × ٦ = ٣٠٠٠ ث.جم.سم

∵ القوتين (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

∴ جـ٢ = ٢٠٠ × ٨ = ١٦٠٠ ث.جم.سم

∵ القوتين (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٣)

∴ جـ٣ = ٣٠٠ × ٩,٦ = ٢٨٨٠ ث.جم.سم

∴ جـ = جـ١ + جـ٢ + جـ٣ = ١٤٨٠ ث.جم.سم

وبفرض أن الازدواج المطلوب قياسه الجبرى = جـ٤

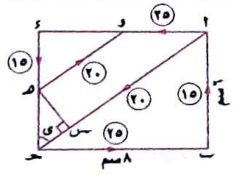
∴ ١٤٨٠ + جـ٤ = ٤٨٠ ∴ جـ٤ = -١٠٠٠

∴ -ق × ١٠ = -١٠٠٠

∴ ق = ١٠٠ ثقل.جم

∴ القوتان المطلوبتان مقدار كل منهما ١٠٠ ثقل.جم إحداهما تؤثر فى ب فى اتجاه $\overleftarrow{أ د}$ والأخرى فى ء فى اتجاه $\overrightarrow{د أ}$

١٥



أ س = ٣ ما ى

= $\frac{٤}{٥}$ × ٣

= ٢,٤

∴ القوتان (١٥ ، ١٥)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = ١٥ × ٨ = ١٢٠ نيوتن.سم

∵ القوتين (٢٥ ، ٢٥) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢)

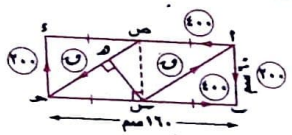
∴ جـ٢ = ٢٥ × ٦ = ١٥٠ نيوتن.سم

∵ القوتين (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٣)

∴ جـ٣ = -٢٠ × ٢,٤ = -٤٨ نيوتن.سم

∴ جـ = ١٢٠ + ١٥٠ - ٤٨ = ٢٢٢ نيوتن.سم

١٦



هـ س = $\frac{٨٠ \times ٦٠}{١٠٠}$ = ٤٨ سم

القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١) حيث جـ١ = -٢٠٠ × ١٦٠ = -٣٢٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ٢) حيث جـ٢ = ٤٠٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠٠ نيوتن.سم

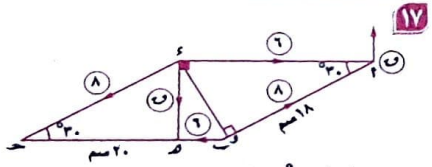
، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا قياسة الجبرى (جـ٣) حيث جـ٣ = ق × ٤٨ = ٤٨ ق

∵ عزم الازدواج المحصل = ٦٤٠٠ نيوتن.سم.

∴ -٣٢٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ٤٨ ق = ٦٤٠٠

٤٨ ق = ١٤٤٠٠ ∴ ق = ٣٠٠ نيوتن.

١٧



ء هـ = ١٨ ما ٣٠° = ٩ سم

، ء و = ٢٠ ما ٣٠° = ١٠ سم

∵ القوتين (٦ ، ٦) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (جـ١)

∴ جـ١ = -٦ × ٩ = -٥٤ نيوتن.سم

∵ القوتين (٨ ، ٨) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج)

∴ ج = ٨ × ١٠ = ٨٠ نيوتن.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ = ٢٦ نيوتن.سم

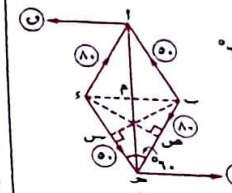
∴ |ج| = ٢٦ نيوتن.سم

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى = ٢٦ نيوتن.سم

∴ ق × ٢٠ = ٢٦ ∴ ق = ١,٣ نيوتن

∴ القوتان ١,٣ ، ١,٣ نيوتن.

١٨



ب س = ½ ص = ١٢ ما ٦٠°

= ٦√٣

∵ القوتين (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجًا

قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = ٥٠ × ٦√٣ = ٣٠٠√٣ ث.جم.سم

∵ القوتين (٨٠ ، ٨٠) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = -٨٠ × ٦√٣ = -٤٨٠√٣ ث.جم.سم

ج = ٣٠٠√٣ - ٤٨٠√٣ = -١٨٠√٣ ث.جم.سم

معيار عزم الازدواج = ١٨٠√٣ ث.جم.سم

أ م = ١٢ ما ٦٠° = ٦√٣

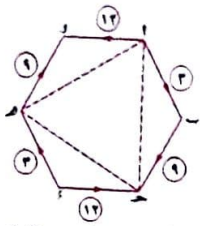
∴ أ حـ = ١٢√٣

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يتزن مع المجموعة = ١٨٠√٣ ثقل.جم.سم

∴ ق × ١٢ = ١٨٠√٣ ∴ ق = ١٥ ث.جم .

∴ الازدواج الذى يتزن مع المجموعة مقدار كل من قوتيه ١٥√٣ ، ١٥ ث.جم وإحداهما عند أ تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب}$ والأخرى عند حـ فى اتجاه $\overleftarrow{حـ}$

١٩



بفرض طول ضلع المسدس ل سم

أ حـ = حـ د = د أ = ل√٣

∵ القوتين (٣ ، ٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = -٣ × ل√٣ = -٣√٣ ل ث.جم.سم

∵ القوتين (٩ ، ٩) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = -٩ × ل√٣ = -٩√٣ ل ث.جم.سم

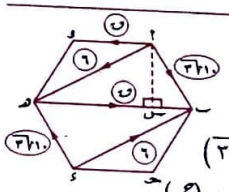
∵ القوتين (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٣)

∴ ج٣ = ١٢ × ل√٣ = ١٢√٣ ل ث.جم.سم

، ∵ ج = ج١ + ج٢ + ج٣ = صفر

∴ المجموعة متزنة.

٢٠



بفرض طول ضلع المسدس ل سم

∵ القوتين (١٠√٣ ، ١٠√٣) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج١)

∴ ج١ = -١٠√٣ × ل√٣ = -٣٠ ل نيوتن.سم

∵ القوتين (٦ ، ٦) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى (ج٢)

∴ ج٢ = ٦ ل نيوتن.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ = -٣٠ ل + ٦ ل = -٢٤ ل نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٢٤ ل نيوتن.سم

، ∵ أ س = ½√٣ ل

لكى تتزن المجموعة يجب أن يؤثر عليها ازدواج آخر عزمه = ٢٤ ل

∴ القوتين تؤثران فى الاتجاه $\overleftarrow{ص ب}$ ، $\overleftarrow{أ و}$

∴ ق × ½√٣ ل = ٢٤ ل ∴ ق = ١٦√٣ نيوتن

∴ القوتان هما : ١٦√٣ ، ١٦√٣ نيوتن.

٢١

① ج = صفر ، ج١ = ٥ × ٢ = ١٠ نيوتن.م ≠ ٠

∴ المجموعة تكافئ ازدواج قياسه الجبرى = ١٠ نيوتن.سم

② ج = صفر ، ج١ = صفر

∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

③ ج = صفر ، ج١ = ١٥ × ٣ - ١٠ × ٦ = -١٥ نيوتن.م ≠ ٠

∴ المجموعة تكافئ ازدواج قياسه الجبرى = -١٥ نيوتن.م

④ ج = صفر ، ج١ = -٣٠ × ٤ + ٢٠ × ٦ = ٠

∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

⑤ ج ≠ ٠ ∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

⑥ ∵ ١٥/١٠ = ١٥/١٠ = ١,٥

، القوى مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواج قياسه الجبرى

= ٢ × ١,٥ × (½ × ١٠ × ١٠ × ما ٦٠°)

= ٧٥√٣ نيوتن.سم

٢٢

و أ = أ - و = (-١ ، ١)

، و ب = ب - و = (-٢ ، ٣)

، و حـ = حـ - و = (٠ ، ١)

ج٠ = و أ × ق١ + و ب × ق٢ + و حـ × ق٣

= (-١ ، ١) × (٢ ، -٤) + (-٢ ، ٣) × (١ ، -٣)

+ (٠ ، ١) × (-٣ ، ٧)

= ٢ ع + ٣ ع + ٣ ع = ٨ ع (١)

، ج٠ = ق١ + ق٢ + ق٣ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٨ وحدة عزم.

٢٣

∵ ج = ق١ + ق٢ + ق٣

= (٢ + ٣ - ٥) س + (١ - ٢ + ١) ص = ٠

∴ القوى إما متزنة أو تكافئ ازدواجًا

، ∵ مجموع عزوم القوى حول حـ

= حـ أ × ق١ + حـ ب × ق٢

حيث حـ أ = (-٣ ، -٤) ، حـ ب = (-٥ ، -٢)

∴ ج حـ = (-٣ ، -٤) × (٢ ، ١)

+ (-٥ ، -٢) × (٣ ، -٢)

= ٥ ع + ١٦ ع = ٢١ ع

∴ القوى تكافئ ازدواج

∴ معيار العزم = ٢١ وحدة عزم.

٢٤

∵ ق١ = ص - ٤ س = -(٤ س - ص) = -ق٢

∴ ق١ ، ق٢ قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه

∴ القوتان تكونان ازدواج عزمه

ج١ = أ ب × ق٢ = (٤ ، ٣) × (٤ ، -١) = -١٦ ع

، ∵ ق٤ = ‖ق٤‖ × أ ب / ‖أ ب‖

= ١٠ × (٤ س + ٣ ص) / (٩ + ١٦√)

= ٨ س + ٦ ص

، ∵ ق٣ = -(٨ س + ٦ ص) = -ق٤

∴ ق٣ ، ق٤ قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه

∴ القوتان تكونان ازدواج عزمه

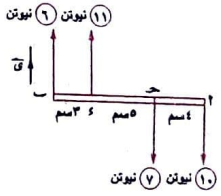
ج٢ = أ حـ × ق٣ = (-٥ ، ٧) × (-٨ ، -٦) = ٨٦ ع

∴ القوى الأربعة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ق_4}$ تكافئ ازدواج عزمه $\overrightarrow{ج}$

حيث $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2}$

$= -١٦\,\overrightarrow{ع} + ٨٦\,\overrightarrow{ع} = ٧٠\,\overrightarrow{ع}$

٢٥



بفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحده فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى

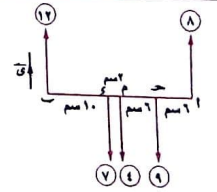
$\overrightarrow{ج} = ١١ + ٦ - ١٠ - ٧ = \overrightarrow{٠}$ ، $ج_1 = ٧ \times ٤ - ١١ \times ٩ - ٦ \times ١٢$ (١)

$= -١٤٣$ نيوتن.سم (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافىء ازدواج القياس الجبرى لعزمه $= -١٤٣$ نيوتن.سم

٢٦



تفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة اتجاهه رأسى إلى أعلى

$\overrightarrow{ج} = ٨\,\overrightarrow{ى} + ١٢\,\overrightarrow{ى} - ٩\,\overrightarrow{ى} - ٤\,\overrightarrow{ى} - ٧\,\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{٠}$ (١)

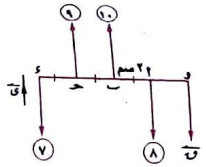
$ج_1 = ٩ \times ٦ + ٤ \times ١٢ + ٧ \times ١٤$

$= ١٢ \times ٢٤ = -٨٨$ نيوتن.سم (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه $= ٨٨$ نيوتن.سم

٢٧



نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين ٩ ، ١٠ ث.جم

$\overrightarrow{ج} = ١٠\,\overrightarrow{ى} + ٩\,\overrightarrow{ى} - ٨\,\overrightarrow{ى} - ٧\,\overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق} = ٤\,\overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق}$

∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج ∴ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{٠}$

∴ $٤\,\overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{٠}$ ∴ $\overrightarrow{ق} = -٤\,\overrightarrow{ى}$

أى أن: $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٤ ثقل جم

وتعمل فى اتجاه القوتين ٨ ، ٧ ث.جم

∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج $= -٢٦$ ثقل جم.سم

∴ $ج_1 = -٢٦$

∴ $٧ \times ٦ - ١٠ \times ٢ - ٩ \times ٤ + ج = -٢٦$

∴ ج (القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول ا)

$= -٢٦ + ١٤ = -١٢$ ثقل جم.سم

∵ ج سالبة ، $\overrightarrow{ق}$ إلى أسفل

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يقع على يمين ا أى

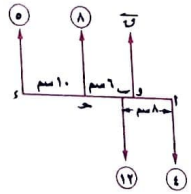
يقطع امتداد $\overrightarrow{ء ا}$ من جهة ا فى (و)

بحيث $-٤ \times$ ا و $= -١٢$ ∴ ا و $= ٣$ سم

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يقطع $\overrightarrow{ء ا}$ فى و

حيث و $\notin \overrightarrow{ء ا}$ ، ا و $= ٣$ سم

٢٨



نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين ٥ ، ٨ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ج} = ٨\,\overrightarrow{ى} + ٥\,\overrightarrow{ى} - ٤\,\overrightarrow{ى} - ١٢\,\overrightarrow{ى}$

$+ \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق} - ٣\,\overrightarrow{ى}$

∵ المجموعة تكافئ ازدواج

∴ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{٠}$ ∴ $\overrightarrow{ق} = ٣\,\overrightarrow{ى}$

∴ ق $= ٣$ نيوتن وتعمل فى اتجاه رأسى إلى أعلى

ونفرض أن القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول ا $= ج$

∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج $= -١٥١$ نيوتن.سم

∴ $١٢ \times ٨ - ١٤ \times ٥ + ٢٤ \times ج = -١٥١$

∴ $ج = ١٣٦ - ١٥١ = -١٥$ نيوتن.سم

∵ ج سالبة ، $\overrightarrow{ق}$ إلى أعلى

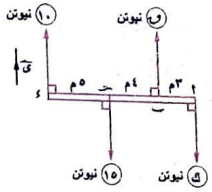
∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يقع على يسار ا أى يقطع $\overrightarrow{ء ا}$ فى نقطة (و) بحيث

$-٣ \times$ ا و $= -١٥$

∴ ا و $= ٥$ سم

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يقطع $\overrightarrow{ا ب}$ فى و حيث ا و $= ٥$ سم

٢٩



نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين ق ، ١٠ نيوتن

∴ $ج = ق + ١٠ - ١٥$

∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج

∴ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{٠}$ ∴ $ق - ٥ = ٠$ (١)

∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج $= -٧٥$ نيوتن.م

∴ $ج_1 = -٧٥$

∴ $-ق \times ٢ + ١٥ \times ٧ - ١٠ \times ١٢ = -٧٥$

∴ $-٢ق = -٦٠$

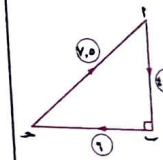
∴ $ق = ٣٠$ نيوتن

ومن (١) : $ل = ١٥$ نيوتن.

٣٠

① (ب)	② (د)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (أ)	⑥ (أ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (د)	⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (جـ)	⑯ (ب)

٣١



∵ $(١٧,٥)^2$

$= (١٤)^2 + (١٠,٥)^2$

∴ Δ قائم الزاوية فى ب

∵ $\frac{٤,٥}{١٠,٥} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٧,٥}{١٧,٥} = \frac{٣}{٧}$

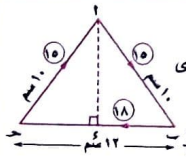
∴ القوى فى اتجاه دورى واحد ومتناسبة مع أطوال الأضلاع

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

$= ٢ \times$ مساحة المثلث $\times \frac{٣}{٧}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٤ \times ١٠,٥ \times \frac{٣}{٧} = ٦٣$ نيوتن.سم

٣٢



∵ أضلاع المثلث تمثل القوى تمثيلاً تامًا

∴ $\frac{١٥}{ا ب} = \frac{١٥}{ا ح} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ ا ب $=$ ا ح $= ١٠$ سم

∴ القوى فى اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

$= ٢ \times$ مساحة Δ $\times \frac{٣}{٢}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ \times \frac{٣}{٢} = ١٤٤$ ث.كجم.سم

∴ معيار عزم الازدواج $= ٢٤$ ل نيوتن.سم

∵ ا س $= \frac{٣}{٢}$ ل

لكى تتزن المجموعة يجب أن يؤثر عليها ازدواج آخر عزمه $= ٢٤$ ل

∴ القوتين تؤثران فى الاتجاه $\overleftarrow{ص ب}$ ، $\overrightarrow{ا و}$

∴ ق $\times \frac{٣}{٢}$ ل $= ٢٤$ ل ∴ ق $= ١٦$ نيوتن

∴ القوتان هما : $١٦\sqrt{٣}$ ، $١٦\sqrt{٣}$ نيوتن.

∴ الازدواج الذى يتزن مع المجموعة مقدار كل من قوتيه $١٥\sqrt{٣}$ ، ١٥ ث.جم وإحداهما عند ا تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$ والأخرى عند ح فى اتجاه $\overrightarrow{ء ب}$

∵ $\overrightarrow{ق_3} = -(٨\,\overrightarrow{س} + ٦\,\overrightarrow{ص}) = -\overrightarrow{ق_4}$

∴ $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ق_4}$ قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه

∴ القوتان تكونان ازدواج عزمه

$\overrightarrow{ج_4} = \overrightarrow{اح} \times \overrightarrow{ق_4} = (-٥ ، ٧) \times (-٨ ، -٦) = ٨٦\,\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2} + \overrightarrow{ج_3} + \overrightarrow{ج_4}$

$= (-١ ، ١) \times (٢ ، -٤) + (-٢ ، ٣) \times (١ ، -٣)$

$+ (٠ ، ١) \times (-٣ ، ٧)$

$= ٢\,\overrightarrow{ع} + ٣\,\overrightarrow{ع} + ٢\,\overrightarrow{ع} = ٨\,\overrightarrow{ع}$ (١)

$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} + \overrightarrow{ق_4} = \overrightarrow{٠}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه $= ٨$ وحدة عزم.

٣٤

∴ $\text{جتا}(\text{ب}) = \frac{\text{ب}^2 + \text{أ}^2 - \text{ح}^2}{2\,\text{ب}\,\text{أ}}$

$= \frac{25 + 36 - 49}{2 \times 5 \times 6}$

$= \frac{1}{5}$

∴ $\text{ظا}(\text{ب}) = \sqrt{24}$

، ∵ $\frac{\text{ح}}{\text{جا}(\text{ح})} = \frac{\text{ب}}{\text{جا}(\text{ب})}$

∴ $\frac{7}{\text{جا}(\text{ح})} = \frac{5}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \frac{25}{\sqrt{24}} = \frac{250}{\sqrt{96}}$

∴ أضلاع المثلث تمثل القوى تمثيلاً تامًا

فى اتجاه دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكافىء ازدواجًا معيار عزمه

$= 2 \times \text{مساحة } \Delta$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{24} \times \frac{250}{\sqrt{96}}$

$= 500$ ثقل جم سم

حل آخر :

يمكن ايجاد المساحة من القانون

مساحة $\Delta = \sqrt{\text{ط}(\text{ط}-\text{أ})(\text{ط}-\text{ب})(\text{ط}-\text{ح})}$

، ∵ $\text{ط} = \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}}{2} = \frac{7 + 6 + 5}{2} = 9$ سم

∴ مساحة $\Delta = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$= 6\sqrt{6}$ سم^2

∴ معيار عزم الازدواج $= 2 \times 6\sqrt{6} \times 50$

$= 600\sqrt{6}$ ثقل جم سم

٣٥

∵ أضلاع المثلث تمثل القوى تمثيلاً تامًا

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا}(\text{ح})} = \frac{\text{ب ح}}{\text{جا}(\text{أ})} = \frac{\text{أ ح}}{\text{جا}(\text{ب})}$

∴ $\frac{10.5}{\text{جا}(\text{ح})} = \frac{12}{\text{ب ح}} = \frac{19.5}{\text{جا}(\text{ب})} = \frac{3}{2}$

∴ أ ب = ٧ سم ، ب ح = ٨ سم

، ∵ $\text{جتا}(\text{ب}) = \frac{\text{أ ب}^2 + \text{ب ح}^2 - \text{أ ح}^2}{2\,\text{أ ب}\,\text{ب ح}}$

$= \frac{49 + 64 - 169}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$

∴ ق (∠ب) = ١٢٠°

، ∵ الأضلاع فى اتجاه دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

$= 2 \times \text{مساحة } \Delta$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \text{جا } 120° \times \frac{3}{2}$

$= 42\sqrt{3}$ نيوتن سم

٣٦

∵ $(\text{أ ح})^2$

$= (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ح})^2$

∴ ق (∠أ ب ح) = ٩٠°

، ∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{15}{5} = \frac{36}{12} = \frac{39}{13} = 3$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -2 \times \text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ح} \times 3$

$= -2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \times 3 = -180$ ث جم سم

٣٤

∵ $\text{ب}^2 = \text{أ}^2 + \text{ح}^2 - 2\,\text{أ ح جتا}(\text{أ})$

$= 256 + 100 - 2 \times 16 \times 10 \times \frac{1}{2} = 196$

∴ ب ح = ١٤ سم

، ∵ $\frac{\text{ق}_1}{\text{ب ح}} = \frac{20.5}{10} = \frac{\text{ق}_2}{14} = \frac{3.5}{14} = \frac{1}{4}$

∴ القوى فى اتجاه دورى واحد والقوى متناسبة مع أطوال الأضلاع

∵ القوتين عند أ ، حـ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= 180$ ث جم سم

∴ ق $\times$ ١٣ $= 180$

∴ ق $= \frac{180}{13} = 13\frac{11}{13}$ ث جم

٣٧

∵ جتا $(\text{أ}) = \frac{(13)^2 + (14)^2 - (15)^2}{2 \times 13 \times 14} = \frac{5}{13}$

∴ ظا $(\text{أ}) = \frac{12}{13}$

، ∵ القوة فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{39}{13} = \frac{42}{14} = \frac{45}{15} = 3$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -2 \times$ مساحة المثلث $\times 3$

$= -2 \times \frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \frac{12}{13} \times 3$

$= -504$ نيوتن سم

∴ معيار عزم الازدواج

$= 504$ نيوتن سم

∴ القوتان عند ب ، حـ تكونان ازدواجًا

قياسه الجبرى $= 504$ نيوتن سم

∴ ق $\times$ ١٤ $= 504$ ∴ ق $= 36$

∴ القوتان ٣٦ ، ٣٦ نيوتن

٣٨

∵ أ ء $= \sqrt{169 - 25}$

$= 12$ سم

، ∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{52}{13} = \frac{20}{5} = \frac{48}{12} = 4$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -2 \times$ مساحة Δ أ ب ء $\times 4$

$= -2 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times 4$

$= -240$ نيوتن سم

∴ القوتان المطلوبتان تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= 240$ نيوتن سم

، ∵ ب س $\times$ ١٣ $= 10 \times 12$

∴ ب س $= \frac{120}{13}$ ∴ ق $\times \frac{120}{13} = 240$

∴ ق $= 26$ ∴ القوتان ٢٦ ، ٢٦ نيوتن.

٣٩

∵ $\frac{18}{9} = \frac{24}{12} = \frac{30}{15} = \frac{48}{24} = 2$

أى أن : القوى تتناسب مع أطوال الأضلاع التى تمثلها

، ∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافىء ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$= -2 \times \frac{24 + 12}{2} \times 9 \times 2 = -648$ ث جم سم

∴ المجموعة تكافىء ازدواجًا معيار عزمه

$= 648$ ث جم سم

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $= 648$ ث جم سم

∴ ق $\times$ و م $= 648$

∴ ق $\times$ ١٢ جا (∠ء أ م) $= 648$

∴ ق $\times 12 \times \frac{9}{15} = 648$ ∴ ق $= 90$ ث جم

∴ القوتان تساويان ٩٠ ، ٩٠ ث جم

٤٠

من هندسة الشكل :

ب و $=$ هـ حـ $= 12$ سم

، أ و $=$ ء هـ $= 9$ سم

∵ القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{45}{15} = \frac{27}{9} = \frac{45}{15} = \frac{99}{33} = 3$

، ∵ مساحة الشكل أ ب حـ ء

∵ القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ فى اتجاه دورى واحد

∴ $\frac{٤٥}{١٥} = \frac{٢٧}{٩} = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٩٩}{٣٣} = ٣$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا

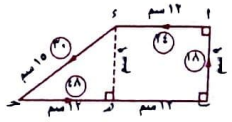
القياس الجبرى لعزمه = $-٢ \times$ مساحة شبه المنحرف $\times ٣$

$= -٢ \times \frac{١}{٢} [٣٣ + ٩] \times ٩ \times ٣$

$= -١١٣٤$ نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١١٣٤ نيوتن.سم

٤١



∵ $ء حـ = \sqrt{٨١ + ١٤٤} = ١٥$ سم

∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∵ $\frac{١٨}{٩} = \frac{٢٤}{١٢} = \frac{٣٠}{١٥} = \frac{٤٨}{٢٤} = ٢$

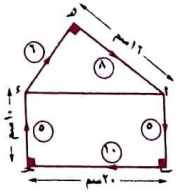
∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

$= ٢ \times$ مساحة شبه المنحرف $\times ٢$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} (١٢ + ٢٤) \times ٩ \times ٢$

$= ٦٤٨$ نيوتن.سم

٤٢



فى Δ ء ا ء :

$ء د = \sqrt{(٢٠)^٢ - (١٦)^٢}$

$= ١٢$ سم

∵ القوى ٥ ، ١٠ ، ٥ ،

٦ ، ٨ ثقل جم

تؤثر فى ترتيب دورى واحد فى الشكل ا ب حـ ء د

∵ $\frac{٥}{١٠} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٦}{١٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٢ \times$ مساحة الشكل $\times \frac{١}{٢}$

∵ مساحة الشكل ا ب حـ ء د

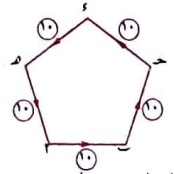
= مساحة المستطيل ا ب حـ ء + مساحة Δ ء د ا

$= ١٠ \times ٢٠ + \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٦ = ٢٩٦$

∴ معيار عزم الازدواج $= ٢ \times ٢٩٦ \times \frac{١}{٢}$

$= ٢٩٦$ ثقل جم.سم

٤٣



∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∵ $\frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

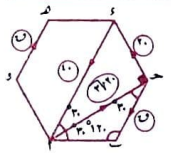
$= ٢ \times$ مساحة الخماسى $\times \frac{٢}{٣}$

$= ٢ \times \frac{٥}{٤} \times (١٥)^٢ \times (\text{ط}\ا \frac{١٨٠}{٥}) \times \frac{٢}{٣}$

$= ٥١٦,١٤$ ث كجم.سم

∴ معيار عزم الازدواج $= ٥١٦,١٤$ ث كجم.سم

٤٤



∵ Δ ا ء حـ قائم الزاوية

فى حـ وفيه :

$ء حـ = ١٠$ سم

، $حـ ا = ١٠ \sqrt{٣}$ سم ، $ء ا = ٢٠$ سم

∵ القوى $٢٠ \sqrt{٣}$ ، ٢٠ ، ٤٠ فى اتجاه دورى واحد

∵ $\frac{٢٠ \sqrt{٣}}{١٠ \sqrt{٣}} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه $= ٢ \times$ مساحة Δ ا حـ ء $\times ٢$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٠ \times ٢$

$= ٢٠٠ \sqrt{٣}$ نيوتن.سم

∴ لكى تتزن المجموعة لابد أن القوتين فى $\overleftrightarrow{حـ ب}$

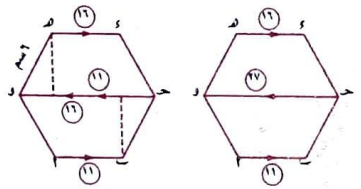
، $\overleftrightarrow{ف و}$ تكونان إزدواجًا عزمه $= -٢٠٠ \sqrt{٣}$

وتكون ق فى $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ، ق فى $\overleftrightarrow{و ف}$

∴ $-$ ق $\times$ حـ ف $= -٢٠٠ \sqrt{٣}$

∴ ق $\times ١٠ = ٢٠٠ \sqrt{٣}$ ∴ ق $= ٢٠ \sqrt{٣}$ نيوتن.

٤٥



نجزىء القوة ٢٧ ثقل جرام إلى قوتين ١٦ ثقل جم

، ١١ ثقل جم فى نفس اتجاهها

∴ القوتان (١٦ ، ١٦) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -١٦ \times ٣ \sqrt{٣} = -٤٨ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم (١)

∵ القوتين (١١ ، ١١) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ١١ \times ٣ \sqrt{٣} = ٣٣ \sqrt{٣}$ ثقل.جم.سم (٢)

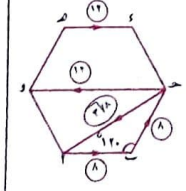
من (١) ، (٢) :

∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى

$= -٤٨ \sqrt{٣} + ٣٣ \sqrt{٣} = -١٥ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

∴ معيار الازدواج $= ١٥ \sqrt{٣}$ ثقل.جم.سم

٤٦



∵ القوى $٨ \sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٨

فى اتجاه دورى واحد

∵ $\frac{٨}{١٦} = \frac{٨ \sqrt{٣}}{١٦ \sqrt{٣}} = \frac{١}{٢}$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ٢ \times$ مساحة Δ ا ب حـ $\times \frac{١}{٢}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ١٦ \times$ جا $١٢٠° \times \frac{١}{٢}$

$= ٦٤ \sqrt{٣}$ ثقل جرام.سم (١)

∵ القوتان (١٢ ، ١٢)

تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -١٢ \times ٨ \times ٣ \sqrt{٣} = -٩٦ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم (٢)

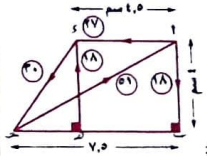
من (١) ، (٢) :

∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى

$= -٣٢ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

، معيار عزم الازدواج $= ٣٢ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

٤٧



∵ ا ء = ب د

$= ٤,٥$ سم

∴ د حـ $= ٣$ سم

∴ فى Δ ء د حـ يكون :

$ء حـ = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ سم

، فى Δ ا ب حـ يكون

$ا حـ = \sqrt{(٤)^٢ + (٧,٥)^٢} = ٨,٥$ سم

∵ القوى ٢٧ ، ٣٠ ، ٥١ ثقل جرام فى ترتيب دورى

واحد فى Δ ا ء حـ

∵ $\frac{٢٧}{٤,٥} = \frac{٣٠}{٥} = \frac{٥١}{٨,٥} = ٦$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ٢ \times \Delta$ ا ء حـ $\times ٦ = ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٤,٥ \times ٤ \times ٦$

$= ١٠٨$ نيوتن.سم (١)

∵ القوتين (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -١٨ \times ٤,٥ = -٨١$ نيوتن.سم (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى

$= ١٠٨ - ٨١ = ٢٧$ نيوتن.سم

∴ معيار العزم $= ٢٧$ نيوتن.سم

∵ Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب

$ا ب = \sqrt{(١٣)^٢ - (١٢)^٢} = ٥$ سم

∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∵ $\frac{١٥}{٥} = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٢ \times$ مساحة Δ ٢

$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٥ \times ٣ = -١٨٠$ ث.جم.سم

∵ $\frac{٥٢}{١٣} = \frac{٢٠}{٥} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$

∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٢ \times$ مساحة Δ ا ب ء $\times ٤$

$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٩ \times ٤ = -٤٣٢$ ث.جم.سم

٤٨

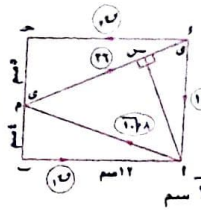
من هندسة الشكل :

ب و $=$ د حـ $= ١٢$ سم

، ا و $=$ ء د $= ٩$ سم



٤٨



∵ م$_{ع}$ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$

= ١٣ سم

، ∵ م$_{ف}$ = $\sqrt{١٤٤ + ١٦}$

= $\sqrt{١٦٠}$ = $\sqrt{١٠ \times ٤}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ سم

القوى فى $\overrightarrow{ا ء}$ ، $\overrightarrow{ا م}$ ، $\overrightarrow{م ء}$ فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{١٨}{٩}$ = $\frac{٤ \sqrt{١٠}}{\sqrt{١٠} \times ٨}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى (ج$_{١}$)

، ∵ مساحة Δ ا م ء = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ١٢ − (٦ × ٤ + ٦ × ٥)

= ٥٤

∴ ج$_{١}$ = −٢ × ٥٤ × ٢ = −٢١٦ نيوتن.سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ (ق$_{١}$ ، ق$_{٣}$) تعينان ازدواجًا قياسه الجبرى

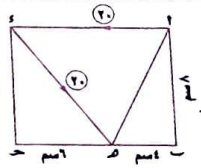
= ٢١٦ نيوتن.سم

∴ ق$_{١}$ = ق$_{٣}$ = ق ∴ ق × ٩ = ٢١٦

∴ ق = ٢٤

∴ ق$_{١}$ = ٢٤ نيوتن ، ق$_{٣}$ = ٢٤ نيوتن.

٤٩



∵ ا ء = $\sqrt{٦٤ + ١٦}$

= ٤ $\sqrt{٥}$

، ∵ ء ح = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$

= ١٠ سم

∴ القوة المطلوبة تؤثر فى $\overrightarrow{ء ح}$

لكى تكون القوى فى ترتيب دورى واحد وبالتالى تؤول المجموعة إلى ازدواج

، ∵ $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$ = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢

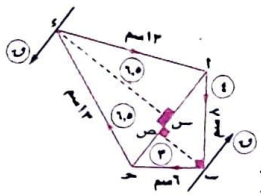
القوة المطلوبة = ٢ × ٤ $\sqrt{٥}$ = ٨ $\sqrt{٥}$ نيوتن

مساحة Δ ا ء ح = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٠ − (٢ × ٨ × ٣ + ٨ × ٣) = ٤٠

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

= ٢ × ٤٠ × ٢ = ١٦٠ نيوتن.سم

٥٠



∵ ا ح

= $\sqrt{(٨)^{٢} + (٦)^{٢}}$

= ١٠ سم

، س منتصف $\overrightarrow{ا ح}$

∴ ء س = $\sqrt{١٦٩ − ٢٥}$ = ١٢ سم

∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{٦,٥}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

= −٢ × [$\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ + $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢] × $\frac{١}{٢}$

= −٨٤ نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٨٤ نيوتن.سم

، ∵ البعد العمودى بين خطى عمل القوتين ق ، ق

= ء س + ب ص = ١٢ + $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ١٦,٨ سم

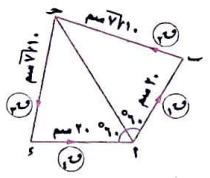
∵ الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

= ٨٤ نيوتن.سم

∴ ق × ١٦,٨ = ٨٤ ∴ ق = ٥ نيوتن.

٥١



فى Δ ا ب ح :

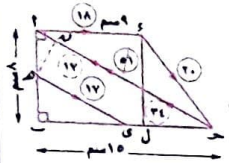
(ب ح)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ا ح)^{٢} − ٢ × ا ب

× ا ح جتا ٦٠°

∴ (١٠ $\sqrt{٧}$)^{٢} = ٢٠^{٢} + (ا ح)^{٢} − ٢ × ٢٠ × ا ح

× جتا ٦٠°

٥٢



∵ ا ء = ٩ سم

∴ ح ل = ١٥ − ٩ = ٦ سم

، ∵ ء ل = ٨ سم

∴ ء ح = ١٠ سم

، من Δ ا ح ب : ح ا = $\sqrt{(٨)^{٢} + (١٥)^{٢}}$ = ١٧ سم

- نجزىء القوة ٥١ نيوتن والتى تعمل فى $\overrightarrow{ح ا}$ إلى قوتين ١٧ نيوتن ، ٣٤ نيوتن وفى نفس الاتجاه
- القوى ١٨ ، ٢٠ ، ٣٤ نيوتن تؤثر فى $\overrightarrow{ا ء}$ ، $\overrightarrow{ء ح}$ ، $\overrightarrow{ح ا}$ (وفى ترتيب دورى واحد)

، ∵ $\frac{١٨}{٩}$ = $\frac{٢٠}{١٠}$ = $\frac{٣٤}{١٧}$ = ٢

∴ هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا قياسه الجبرى

= −٢ × مساحة Δ ا ء ح × ٢

= −٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٨ × ٢

= −١٤٤ نيوتن.سم

- وكذلك القوتان ١٧ نيوتن فى $\overrightarrow{ح ا}$ ، ١٧ نيوتن فى $\overrightarrow{ء ى}$ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى = ١٧ × ء ى

= ١٧ × ا ء جا (د ء ا ب)

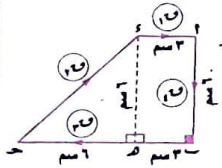
= ١٧ × ٤ × $\frac{١٥}{١٧}$ = ٦٠ نيوتن.سم

∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى

= −١٤٤ + ٦٠ = −٨٤ نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٨٤ نيوتن.سم

٥٣



∵ ء ح = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٦)^{٢}}$

= ٦ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ المجموعة تكافىء

ازدواجًا معيار عزمه = ٣٦٠ نيوتن.سم

ويفرض أن : $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$ = م

٢ × مساحة شبه المنحرف × م = ٣٦٠

∴ ٢ × $\frac{١}{٢}$ (٣ + ٩) × ٦ × م = ٣٦٠

∴ م = ٥

∴ $\frac{ق_{١}}{٣}$ = $\frac{ق_{٣}}{٩}$ = $\frac{ق_{٤}}{٦}$ = ٥

∴ ق$_{١}$ = ٣ × ٥ = ١٥ نيوتن

، ق$_{٣}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ × ٥ = ٣٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن

ق$_{٣}$ = ٩ × ٥ = ٤٥ نيوتن ، ق$_{٤}$ = ٦ × ٥ = ٣٠ نيوتن.

∴ ٧٠٠ = ٤٠٠ + (ا ح)^{٢} − ٢٠ ا ح

∴ (ا ح)^{٢} − ٢٠ ا ح − ٣٠٠ = صفر

∴ (ا ح + ١٠) (ا ح − ٣٠) = ٠ ومنها ا ح = ٣٠

∴ مساحة الشكل ا ب ح ء = ٢ × مساحة Δ ا ب ح

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ا ب × ا ح × جا ٦٠°

= ٢٠ × ٣٠ × جا ٦٠° = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$

، ∵ القوى فى اتجاه دورى واحد ، أضلاع الشكل تمثلها تمثيل تام

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ١٨٠ $\sqrt{٣}$

∴ ٢ × ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ × م = ١٨٠ $\sqrt{٣}$ ومنها م = $\frac{٣}{١٠}$

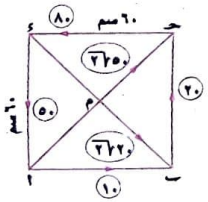
∵ $\frac{ق_{١}}{ا ب}$ = $\frac{ق_{٣}}{ب ح}$ = $\frac{ق_{٤}}{ح ء}$ = $\frac{ق_{٥}}{ء ا}$ = م

∴ $\frac{ق_{١}}{٢٠}$ = $\frac{ق_{٣}}{٧٠}$ = $\frac{ق_{٤}}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ومنها ق$_{١}$ = ق$_{٤}$ = ٦ نيوتن.

، ق$_{٣}$ = ق$_{٥}$ = ٣ $\sqrt{٧}$ نيوتن.

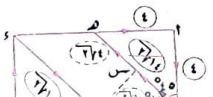
٥٤



ج$_{١}$ = ٢٠ × ٦٠ + ٨٠ × ٦٠ − ٢٠ $\sqrt{٢}$ × ٣٠ $\sqrt{٢}$

= ٤٨٠٠ نيوتن.سم (١)

٥٥



• نستبدل القوة ١٥ نيوتن والتى تعمل فى $\overrightarrow{ب ء}$ بالقوتين ٣٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{ب ء}$ ، ١٥ نيوتن فى

ج$_{١}$ = −٦٠٠ − ١٢ × ٥٠٠ − ٧,٢

= −١٠٨٠٠ ك

٥٧

نفرض أن : ا ب = ل سم

، ∵ ء ح = ١٢ سم

، ∵ ا ب = ٢ ء ح

∴ ل = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

ج$_{١}$ = ٨٠ × ٦٠ + ٥٠ × ٥٠ − ٦٠ × ٢ $\sqrt{٣٠}$ × ٢ $\sqrt{٣٠}$

= ٤٨٠٠ نيوتن. سم (٢)

، ج$_{١}$ = (٢٠ + ٨٠ + ٥٠ + ١٠) × ٣٠

ج = ٨٠ × ٦٠ + ٥٠ × ٦٠ − ٣٠ × ٢√٥٠

= ٤٨٠٠ نيوتن.سم (٢)

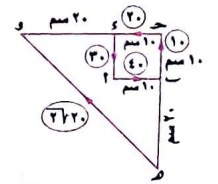
، ج = (٢٠ + ٨٠ + ٥٠ + ١٠) × ٣٠

= ٤٨٠٠ نيوتن.سم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم

٥٥



ج = ٣٠ × ١٠ + ٤٠ × ١٠ − ٢٠ × ١٥ √٢

= ١٠٠ ث كجم.سم (١)

، ج = −٤٠ × ٢٠ + ٣٠ × ١٠

+ ١٠ × ١٠٠ = ١٠٠ ث كجم.سم (٢)

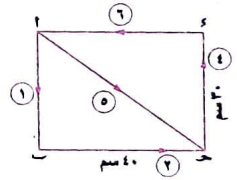
، ج = ١٠ × ٣٠ + ٤٠ × ١٠ − ٣٠ × ٢٠

= ١٠٠ ث.كجم.سم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ١٠٠ ث كجم.سم

٥٦



ج١ = ٤ × ٤٠ + ٢ × ٣٠ = ٢٢٠ ث كجم.سم (١)

، ج٢ = ٦ × ٣٠ + ١ × ٤٠ = ٢٢٠ ث كجم.سم (٢)

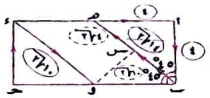
، ج٣ = ١ × ٤٠ + ٢ × ٣٠ + ٥ × $\frac{٤٠ \times ٣٠}{٥٠}$

= ٢٢٠ ث.كجم.سم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٢٢٠ ث كجم.سم

٥٧



نفرض أن : أ ب = ل سم

∴ ب حـ = ٢ ل ويكون

ب د = ل √٢

نجزيء القوة ١٤ √٢ ثقل جرام إلى قوتين ١٠ √٢

، ٤ √٢ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ب د}$ فتكون القوى ٤ ، ٤

، ٤ √٢ ثقل.جم فى ترتيب دورى واحد فى Δ د أ ب

∴ $\frac{٤}{ل} = \frac{٤}{ل} = \frac{٤\sqrt{٢}}{ل\sqrt{٢}}$ (ثابت)

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

= −٢ × مساحة Δ د أ ب × $\frac{٤}{ل}$

= −٢ × $\frac{١}{٢}$ × ل × ل × $\frac{٤}{ل}$

= −٤ ل ثقل.جم.سم (١)

∴ القوتان ١٠ √٢ فى $\overleftarrow{ب د}$

، ١٠ √٢ فى $\overrightarrow{ء و}$ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

= ١٠ √٢ × و س = ١٠ √٢ × ب و مـا ٤٥°

= ١٠ √٢ × $\frac{ل}{٢\sqrt{٢}}$ = ١٠ ل ثقل.جرام.سم (٢)

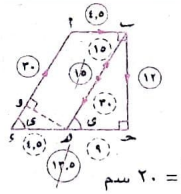
من (١) ، (٢) :

∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى

= −٤ ل + ١٠ ل = ٦ ل ثقل.جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٦ ل = ٦ أ ب ثقل.جم.سم

٥٨



∵ د ء = ٦ سم

∴ حـ د = ١٢ سم

، ∵ ب حـ = ١٦ سم

∴ ب د = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (١٦)^{٢}}$ = ٢٠ سم

، مـا ى = $\frac{١٦}{٢٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

• نستبدل القوة ١٣,٥ نيوتن والتى تعمل فى $\overleftarrow{حـ ء}$ بالقوتين ٩ نيوتن ، ٤,٥ نيوتن وفى نفس الاتجاه

• نستبدل القوة ١٥ نيوتن والتى تعمل فى $\overleftarrow{ب د}$ بالقوتين ٣٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{ب د}$ ، ١٥ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{د ب}$

• القوى ١٢ ، ٩ ، ١٥ والتى تعمل فى :

$\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ د}$ ، $\overleftarrow{د ب}$ (وفى ترتيب دورى واحد)

، ∵ $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٩}{١٢} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ هذه القوى تكافىء ازدواجًا قياسه الجبرى

= −٢ × مساحة Δ ب حـ د × $\frac{٣}{٤}$

= −٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٦ × $\frac{٣}{٤}$

= −١٤٤ نيوتن.سم

• القوتين ٣٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{ء أ}$ ، ٣٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{ب د}$ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

= −٣٠ × د و = −٣٠ × د ء × مـا ى

= −٣٠ × ٦ × $\frac{٤}{٥}$ = −١٤٤ نيوتن.سم

• القوتين ٤,٥ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ ، ٤,٥ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{د ء}$ تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

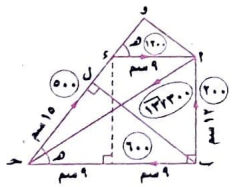
= −٤,٥ × ١٦ = −٧٢ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافىء ازدواجًا قياسه الجبرى

= −١٤٤ − ١٤٤ − ٧٢ = −٣٦٠ نيوتن.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٣٦٠ نيوتن.سم

٥٩



من هندسة الشكل :

ب ل = ١٨ مـا د = ١٨ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ١٤,٤ سم

أ و = ٩ مـا د = ٩ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

، أ حـ = ٦ √١٣ سم

ج١ = −٦٠٠ × ١٢ − ٥٠٠ × ٧,٢

= −١٠٨٠٠ ث كجم.سم (١)

، ج٢ = $\frac{١٨ \times ١٢}{١٣\sqrt{٦}}$ × ١٣√٣٠٠ − ١٢٠٠ × ١٢

− ٥٠٠ × ١٤,٤ = −١٠٨٠٠ ث كجم.سم (٢)

، ج٣ = ٢٠٠ × ١٨ − ١٢٠٠ × ١٢

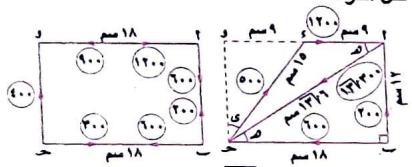
= −١٠٨٠٠ ث كجم.سم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

= ١٠٨٠٠ ث كجم.سم

حل آخر :



* نحلل القوة ٣٠٠ √١٣ ث.كجم إلى مركبتين

• ٣٠٠ √١٣ مـا د = ٣٠٠ × $\frac{١٨}{١٣\sqrt{٦}}$

= ٩٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{ء أ}$

• ٣٠٠ √١٣ مـا د = ٣٠٠ × $\frac{١٢}{١٣\sqrt{٦}}$

= ٦٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

* نحلل القوة ٥٠٠ ث.كجم إلى مركبتين

• ٥٠٠ مـا ى = ٥٠٠ × $\frac{١٢}{١٥}$

= ٤٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{حـ و}$

• ٥٠٠ مـا ى = ٥٠٠ × $\frac{٩}{١٥}$

= ٣٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ب}$

∴ تؤول مجموعة القوى إلى قوة مقدارها

١٢٠٠ − ٩٠٠ = ٣٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{و أ}$

، قوة مقدارها ٦٠٠ − ٣٠٠ = ٣٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$

ويكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_1 = -٣٠٠ \times ١٢ = -٣٦٠٠$ ث.كجم.سم

، قوة مقدارها $٦٠٠ - ٢٠٠ = ٤٠٠$ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

، قوة مقدارها ٤٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{حو}$

ويكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_2 = -٤٠٠ \times ١٨ = -٧٢٠٠$ ث.كجم.سم

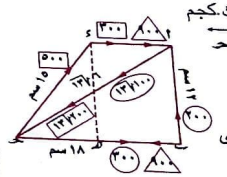
∴ مجموعة القوى تؤول إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج = ج_1 + ج_2 = -٣٦٠٠ - ٧٢٠٠$

$= -١٠٨٠٠$ ث.كجم.سم

حل ثالث :

• نجزئ القوة ٦٠٠ ث.كجم والتى تعمل فى $\overleftarrow{ب حـ}$ إلى قوتين إحداهما ٩٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$ والأخرى ٣٠٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ب}$



• نجزئ القوة ١٢٠٠ ث.كجم والتى تعمل فى $\overleftarrow{ء أ}$ إلى قوتين ٩٠٠ ث.كجم ، ٣٠٠ ث.كجم وفى نفس الاتجاه.

• نجزئ القوة ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث.كجم والتى تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أ حـ}$ إلى قوتين ٢٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث.كجم ، ١٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث.كجم وفى نفس الاتجاه.

∴ القوى ٢٠٠ ، ١٠٠ $\sqrt{١٣}$ ، ٣٠٠ ث.كجم تؤثر فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ (وفى ترتيب دورى واحد)

∵ $\frac{٢٠٠}{١٢} = \frac{١٠٠\sqrt{١٣}}{٦\sqrt{١٣}} = \frac{٣٠٠}{١٨} = \frac{٥٠}{٣}$

∴ هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ٢ \times$ مساحة $\Delta أ ب حـ \times \frac{٥٠}{٣}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٨ \times \frac{٥٠}{٣} = ٣٦٠٠$ ث.كجم.سم

، القوى ٢٠٠ $\sqrt{١٣}$ ، ٥٠٠ ، ٣٠٠ ث.كجم تؤثر فى $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ (وفى ترتيب دورى واحد)

∵ $\frac{٢٠٠}{١٢} = \frac{١٠٠\sqrt{١٣}}{٦\sqrt{١٣}} = \frac{٥٠٠}{١٥} = \frac{٣٠٠}{٩} = \frac{١٠٠}{٣}$

∴ هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٢ \times$ مساحة $\Delta ء حـ \times \frac{١٠٠}{٣}$

$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times ٩ \times ١٢ \times \frac{١٠٠}{٣} = -٣٦٠٠$ ث.كجم.سم

، القوتان ٩٠٠ ، ٩٠٠ ث.كجم تؤثران فى $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$

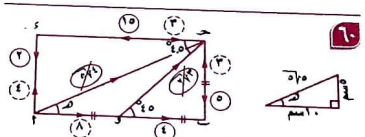
∴ يكون ازدواجًا قياسه الجبرى $= -٩٠٠ \times ١٢$

$= -١٠٨٠٠$ ث.كجم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا قياسه الجبرى

$= -٣٦٠٠ - ٣٦٠٠ = -١٠٨٠٠$ ث.كجم

٦٠



∵ ق(∠ب) = ٩٠° ، $ب حـ = ب و$

∴ ق(∠ب و حـ) = ٤٥°

، $أ حـ = \sqrt{(٥)^2 + (١٠)^2} = ٥\sqrt{٥}$ سم

• بتحليل القوة ٣ $\sqrt{٢}$ إلى المركبة

٣ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° = ٣ ثقل.جم. فى اتجاه $\overleftarrow{ء حـ}$

والمركبة ٣ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° = ٣ ثقل.جم. فى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$

• بتحليل القوة ٤ $\sqrt{٥}$ إلى المركبة

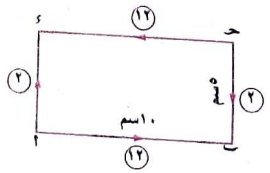
٤ $\sqrt{٥}$ جتا هـ $= ٤\sqrt{٥} \times \frac{١٠}{٥\sqrt{٥}}$

= ٨ ثقل.جم فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

والمركبة ٤ $\sqrt{٥}$ جا هـ $= ٤\sqrt{٥} \times \frac{٥}{٥\sqrt{٥}}$

= ٤ ثقل.جم فى اتجاه $\overleftarrow{ء أ}$

∴ مجموعة مركبات القوى



فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ هى : ٨ + ٤ = ١٢ ثقل.جم

، فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ء}$ هى : ١٥ − ٣ = ١٢ ثقل.جم

، فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ب}$ هى : ٥ − ٣ = ٢ ثقل.جم

، فى اتجاه $\overleftarrow{أ ء}$: ٤ − ٢ = ٢ ثقل.جم

∴ القوتان (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

$= ١٢ \times ٥ = ٦٠$ ث.جم.سم

، القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى

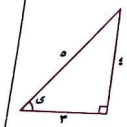
$= -٢ \times ١٠ = -٢٠$ ثقل.جم.سم

∴ المجموعة تكافىء ازدواجًا

∴ الازدواج المحصل قياسه الجبرى = ٤٠ ثقل جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٤٠ ثقل جم.سم

٦١



$ج_ص = -٢٥٠ \text{ جتا } ٣٠° \times ٢$

$- ٢٥٠ \text{ جا } ٣٠° \times ٢$

$-٢٥٠ \text{ جتا } ٣٠° \times ٢$

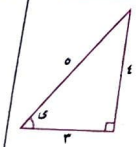
$+ ق \text{ جتا ى} \times ٢ + ق \text{ جا ى} \times ١$

$= -١٥٠ - ٥٠٠\sqrt{٣}$

∴ $ق \times \frac{٣}{٥} \times ٢ + ق \times \frac{٤}{٥} = ٤٠٠$

∴ ق = ٢٠٠ نيوتن.

٦٢



$ج_ص = -٢٠٠ \text{ جتا ى} \times ١$

$- ق \text{ جتا } ٣٠° \times ١$

$+ ق \text{ جا } ٣٠° \times ٢$

$-٢٠٠ \text{ جا ى} \times ٢ = -٢٠٠ - ٢٠٠\sqrt{٣}$

∴ $-١٢٠ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ق + ق = -٣٢٠ - ٢٠٠\sqrt{٣}$

∴ $ق\left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = -٤٠٠ - ٢٠٠\sqrt{٣}$ $\left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ ق = ٤٠٠ نيوتن.

٦٣

① (أ) ② (ب) ③ (د) ④ (د) ⑤ (د)

إرشادات لحل رقم ٦٣ :

① ∵ القوتان (٩ ، ٩) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_1$) حيث $ج_1 = ٩ \times ٤ = ٣٦$ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج قياسه الجبرى = ± ٢٠ نيوتن.سم

∴ القوتان ($ق_1$ ، $ق_2$) تكونان ازدواجًا قياسه الجبرى ($ج_2$)

∴ $ق_1 = ق_2 = ق$ ، $ج_2 = -ق \times ٤ = -٤ق$

∵ $ج_1 + ج_2 = \pm ٢٠$ ∴ $٣٦ - ٤ق = \pm ٢٠$

∴ $-٤ق = -٥٦$ ومنها ق = ١٤ نيوتن

أ، $-٤ق = -١٦$ ومنها ق = ٤ نيوتن.

② $٣٠ \times س - ٢٠ \times \frac{١}{٢} \times ١٠ - س \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times ٣\sqrt{٣}$

$= ١٠٠$

∴ $٣٠ س - ١٠ س - ١٥ س = ١٠٠$

∴ $٥ س = ١٠٠$ ∴ س = ٢٠ سم

③ ∵ المجموعة تكافئ ازدواج بعد اضافة القوة التى مقدارها ق نيوتن

∴ $\frac{١٣ + ق}{٩} = \frac{١٩ + ق}{١٢}$ (١)

∴ $٣ (١٩ + ق) = ٤ (١٣ + ق)$

∴ $٥٧ + ٣ق = ٥٢ + ٤ق$

∴ ق = ٥ نيوتن.

وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{٥ + ١٣}{٩} = ٢$

، ∵ $\frac{٥ + ٢٥}{\sqrt{(١٢)^2 + (٩)^2}} = ٢$

∴ مقدار القوة المطلوبة ق = ٥ نيوتن

$\therefore$ ق = $-$ ق × مقدار موجب = مقدار سالب

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه سالب

⑤ $\because$ المجموعة تكافئ ازدواج

فإن : ق = ٣ + ٧ = ١٠ نيوتن

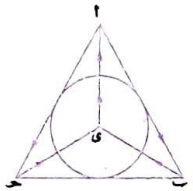
وفى حالة أن تكون نقطة تأثير القوة هى حـ

فإن ج$_{حـ}$ = ٣ × ١٤ − ٧ × ٦ = صفر

$\therefore$ المجموعة تكون متزنة (تعارض)

$\therefore$ لابد أن تكون نقطة تأثير القوة ق هى أى نقطة على القضيب غير النقطة (حـ)

⑥



$\because$ القوى التى يمثلها $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بى}$ ، $\overleftarrow{ىأ}$ تكافىء ازدواج عزمه

= $-$٢ مساحة Δ أ ب ى

= $-$٢ × $\frac{1}{2}$ أ ب × نق = $-$ أ ب × نق

، القوى التى يمثلها $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{حـى}$ ، $\overleftarrow{ىأ}$ تكافىء ازدواج عزمه = ٢ مساحة Δ أ ى حـ

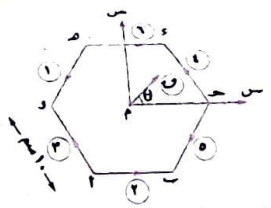
= ٢ × $\frac{1}{2}$ × أ حـ × نق = أ حـ × نق

$\therefore$ المجموعة تكافىء ازدواج عزمه

= أ حـ × نق − أ ب × نق = نق (أ حـ − أ ب)

وتتزن هذه المجموعة إذا كان عزم الازدواج = صفر

أى : عندما أ حـ = أ ب



نفرض $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{مـ}$ ، العمودى عليه

وأن القوى ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن هى :

ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ ، ق$_4$ ، ق$_5$ ، ق$_6$ على الترتيب

$\therefore$ $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$

، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٥ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{س})$ + ٥ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{ص})$

= $-\frac{5}{2}\overleftarrow{س} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3}$ = ٤ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{س})$ + ٤ ما ٦٠° $\overleftarrow{ص}$

= $-$٢ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\sqrt{3}$ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_4}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$

، $\overleftarrow{ق_5}$ = ١ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{س})$ + ١ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{ص})$

= $-\frac{1}{2}\overleftarrow{س} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_6}$ = ٣ ما ٦٠° $(-\overleftarrow{س})$ + ٣ ما ٦٠° $\overleftarrow{ص}$

= $-\frac{3}{2}\overleftarrow{س} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\overleftarrow{ص}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ج}$ = $\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$ + $\overleftarrow{ق_3}$ + $\overleftarrow{ق_4}$ + $\overleftarrow{ق_5}$ + $\overleftarrow{ق_6}$

$\overleftarrow{ج}$ = $\frac{3}{2}\overleftarrow{س} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\overleftarrow{ص}$

، $\because$ المجموعة تؤول إلى ازدواج

$\therefore$ $\overleftarrow{ق}$ + $\overleftarrow{ج}$ = $\overleftarrow{.}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ق}$ = $-\overleftarrow{ج}$ = $\frac{3}{2}\overleftarrow{س} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\overleftarrow{ص}$

$\therefore$ ‖ $\overleftarrow{ق}$ ‖ = $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}}$ = $\sqrt{36}$ = ٦ نيوتن

، $\because$ ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، س > ٠ ، ص < ٠ .

$\therefore$ θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

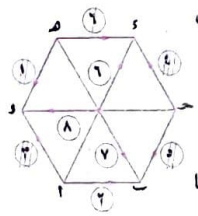
أى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{حـأ}$

، ج$_{م}$ = (٢ − ٥ + ٤ − ٦ + ١ − ٣) × ٥ $\sqrt{3}$

= $-$٣٥ $\sqrt{3}$ نيوتن سم

حل آخر :

يمكن اعتبار القوة ق التى تؤثر فى مركز المسدس لكى تؤول المجموعة إلى ازدواج هى محصلة مجموعة من القوى كل منها تكون ازدواج مع القوى المعطاه



وبالتالى تكون القوة $\overleftarrow{ق}$ هى محصلة القوى (٦ ، ٦٠°) ، (٨ ، ١٨٠°) ، (٧ ، ٣٠٠°)

$\therefore$ س = ٦ ما ٦٠° + ٨ ما ١٨٠° + ٧ ما ٣٠٠° = $\frac{-3}{2}$

، ص = ٦ ما ٦٠° + ٨ ما ١٨٠° + ٧ ما ٣٠٠° = $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ق = $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}$ = $\sqrt{36}$ = ٦ نيوتن

، ظا θ = $\frac{-3\sqrt{3}}{2} \div \frac{-3}{2}$ = $\sqrt{3}$ ، س > ٠ ، ص < ٠ .

$\therefore$ θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

أى أن : القوة فى اتجاه $\overleftarrow{حـأ}$

إجابات
تمارين

الوحدة السادسة



مركز الثقل

إجابات تمارين ع 10

١

① (ب)	② (ب)	③ (د)
④ (ب)	⑤ (جـ)	⑥ (ب)

٢

① ✓	② ✗	③ ✓	④ ✓
⑤ ✗	⑥ ✓	⑦ ✓	⑧ ✗

٣

$س_م = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times ٢ - ٢ \times ٣ + ٠ \times ٣}{١ + ٢ + ٣} = -\frac{١}{٣}$

$، ص_م = \frac{١ \times ٣ + ١ \times ٢ + ٣ \times ١}{١ + ٢ + ٣} = \frac{٤}{٣}$

∴ مركز الثقل هو $(-\frac{١}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

٤

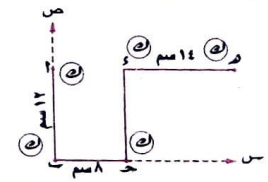
$س_م = \frac{١ \times ٠ + ٣ \times ١ + ٣ \times ٢ + ٣ \times ١}{١ + ١ + ٢} = \frac{٩}{٤}$

$، ص_م = \frac{١ \times ٠ + ٠ \times ١ + ٤ \times ٢}{١ + ١ + ٢} = ٢$

∴ مركز الثقل هو $(\frac{٩}{٤} ، ٢)$

٥

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$



الكتلة	أ	ب	حـ	ء	د
	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	٨	٨	٨	٢٢
ص	١٢	٠	١٢	١٢	١٢

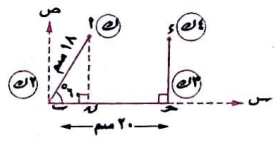
وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{ك \times ٨ + ك \times ٨ + ك \times ٢٢}{٥ ك} = ٧,٦$

$، ص_م = \frac{ك \times ١٢ + ك \times ١٢ + ك \times ١٢}{٥ ك} = ٧,٢$

∴ مركز الثقل = (٧,٦ ، ٧,٢) بالنسبة للنقطة «ب»

٦



نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

، نرسم $\overline{أ د} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ب د = ٩ سم ، أ د = ء حـ = $٩\sqrt{٣}$ سم

الكتلة	أ	ب	حـ	ء
	ك	٢ ك	٣ ك	٤ ك
س	٩	٠	٢٠	٢٠
ص	$٩\sqrt{٣}$	٠	٠	$٩\sqrt{٣}$

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{ك \times ٩ + ك \times ٢٠ + ك \times ٢٠}{١٠ ك} = ١٤,٩$

$، ص_م = \frac{ك \times ٩\sqrt{٣} + ك \times ٩\sqrt{٣}}{١٠ ك} = ٤,٥\sqrt{٣}$

∴ مركز الثقل = $(١٤,٩ ، ٤,٥\sqrt{٣})$ بالنسبة للنقطة «ب»

٧

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أ ب}$ ، العمودى عليه

وليكن $\overleftarrow{أ ص}$

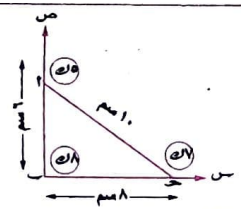
	أ	حـ	د	و
ك	٨	٣	٢	٢
س	٠	٥٠	١٠٠	١٥٠
ص	٠	٥٠-	٠	٠

$س_م = \frac{٨ \times ٠ + ٣ \times ٥٠ + ٢ \times ١٠٠ + ٢ \times ١٥٠}{٨ + ٣ + ٢ + ٢} = \frac{١٣٠}{٣}$

، $ص_م = \frac{٨ \times ٠ - ٣ \times ٥٠ + ٢ \times ٠ + ٢ \times ٠}{٨ + ٣ + ٢ + ٢} = -١٠$

∴ مركز الثقل = $(\frac{١٣٠}{٣} ، -١٠)$ بالنسبة للنقطة «أ»

٨



من هندسة الشكل :

ب حـ = ٨ سم نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

الكتلة	أ	حـ	ب
	٥ ك	٧ ك	٨ ك
س	٠	٨	٠
ص	٦	٠	٠

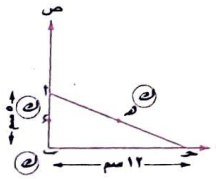
وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{٨ \times ك ٧}{ك ٥ + ك ٧ + ك ٨} = ٢,٨$

$، ص_م = \frac{٦ \times ك ٥}{ك ٢٠} = ١,٥$

∴ مركز الثقل = (٢,٨ ، ١,٥) بالنسبة للنقطة «ب»

٩



∵ $(أ حـ)^٢ = ١٦٩$ سم^٢

، $(أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$

$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

∴ ق (د أ ب حـ) = ٩٠°

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

الكتلة	ب	ء	د
	ك	ك	ك
س	٠	٠	٦
ص	٠	٢,٥	٢,٥

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{ك \times ٦}{ك ٣} = ٢$

$، ص_م = \frac{ك \times ٢,٥ + ك \times ٢,٥}{ك ٣} = ١\frac{٢}{٣}$

∴ مركز الثقل = $(٢ ، ١\frac{٢}{٣})$ بالنسبة للنقطة «ب»

، بُعد م عند ب = $\sqrt{(٢)^٢ + (\frac{٥}{٣})^٢} = \frac{\sqrt{٦١}}{٣}$ سم

١٠

① $س_م = \frac{٤ \times ٠ + ٥ \times ١٢ + ٣ \times ٦}{٤ + ٥ + ٣} = ٦,٥$

$ص_م = \frac{٤ \times ٠ + ٥ \times ٠ + ٣ \times ٦}{٤ + ٥ + ٣} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٢}$

∴ مركز الثقل = $(٦,٥ ، \frac{٣\sqrt{٦}}{٢})$

② $س_م = \frac{٢٠ \times ١٠ + ٣٠ \times ١٠ + ٠ \times ١٠ + ٤٠ \times ٠}{٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ٤٠} = ٥$

$، ص_م = \frac{٢٠ \times ١٠ + ٣٠ \times ٠ + ١٠ \times ٠ + ٤٠ \times ١٠}{٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ٤٠} = ٦$

∴ مركز الثقل = (٥ ، ٦)

③ بفرض أن طول ضلع المسدس «ل»

$س_م = \frac{\frac{ل}{٢} \times ١٥ + \frac{ل}{٢} \times ٥ + \frac{-ل}{٢} \times ٢٠ + \frac{-ل}{٢} \times ١٠}{٢٠ + ٥ + ١٥ + ١٠}$

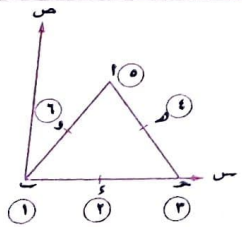
= صفر

$ص_م = \frac{\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ل \times ١٥ - \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ل \times ٥ + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ل \times ٢٠ - \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ل \times ١٠}{٢٠ + ٥ + ١٥ + ١٠}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{١٠} ل$

∴ مركز الثقل = $(٠ ، \frac{٣\sqrt{٣}}{١٠} ل)$

١١



باخذ اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{س س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

	أ	ب	ء	حـ	د	و
ل	٥	١	٢	٣	٤	٦
س	٢	٤	٣	٢	٣	١
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠	٠	٠	$\sqrt{٣}$	$\sqrt{٣}$

$س_م = \frac{٥ \times ١ + ٢ \times ٣ + ٠ \times ٤ + ٢ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٦ \times ١}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦}$

$= \frac{٤٤}{٢١}$

$ص_م = \frac{٥ \times ٢\sqrt{٣} + ١ \times ٠ + ٣ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٤ \times \sqrt{٣} + ٦ \times \sqrt{٣}}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦}$

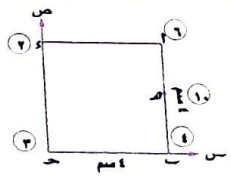
$= \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}$

∴ مركز الثقل = $(\frac{٤٤}{٢١} ، \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١})$ بالنسبة للنقطة «ب»

، بُعد مركز الثقل عن ب = $\sqrt{(\frac{٤٤}{٢١})^٢ + (\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١})^٢}$

$= \frac{٢}{٣}$ ٢ سم

١١



نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

	حـ	ب	أ	ء	د
ل	٣	٤	٦	٢	١٠
س	٠	٤	٤	٠	٤
ص	٠	٤	٠	٤	٢

$س_م = \frac{٣ \times ٠ + ٤ \times ٤ + ٦ \times ٤ + ٢ \times ٠ + ١٠ \times ٤}{٣ + ٤ + ٦ + ٢ + ١٠}$

$= ٣,٢$

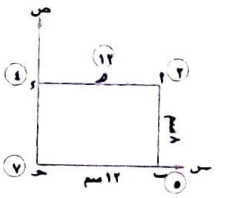
$ص_م = \frac{٣ \times ٠ + ٤ \times ٤ + ٦ \times ٠ + ٤ \times ٢ + ١٠ \times ٢}{٣ + ٤ + ٦ + ٢ + ١٠}$

$= ٢,٠٨$

أ.أ: مركز الثقل يبعد ٣,٢ سم عن $\overline{حـ ء}$

، ٢,٠٨ سم عن $\overline{حـ ب}$

١٣



نختار أتجاهين $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$

	أ	د	ء	حـ	ب
ل	٢	١٢	٤	٧	٥
س	١٢	٦	٠	٠	١٢
ص	٨	٨	٨	٠	٠

$س_م = \frac{٢ \times ١٢ + ١٢ \times ٦ + ١٢ \times ٥}{٢ + ١٢ + ٤ + ٧ + ٥}$

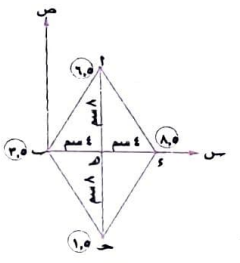
$= ٥,٢$

$ص_م = \frac{٢ \times ٨ + ١٢ \times ٨ + ٤ \times ٨}{٢ + ١٢ + ٤ + ٧ + ٥}$

$= ٤,٨$

أ.أ: مركز الثقل = (٥,٢ ، ٤,٨) بالنسبة للنقطة «حـ»

١٤



نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

	أ	ب	حـ	ء
ل	٦,٥	٣,٥	١,٥	٨,٥
س	٤	٠	٤	٨
ص	٨	٠	٨-	٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل لمجموعة هى :

$س_م = \frac{٨ \times ٨,٥ + ٤ \times ١,٥ + ٦,٥ \times ٤}{٨,٥ + ١,٥ + ٣,٥ + ٦,٥} = ٥$

$ص_م = \frac{(-٨) \times ١,٥ + ٨ \times ٦,٥}{٨,٥ + ١,٥ + ٣,٥ + ٦,٥} = ٢$

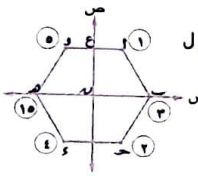
∴ مركز الثقل «م» = (٥ ، ٢)

، م د = $\sqrt{(٥ - ٤)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٥}$ سم

∴ مركز ثقل المجموعة يبعد عن مركز المعين بمقدار $\sqrt{٥}$ سم

١٥

نفرض طول ضلع السداسى ل



∴ ب د = ل ، ع ف = $\frac{ل}{٢}$

، د ع = $\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$

، ف حـ = ل $\sqrt{٣}$

ونختار اتجاهين $\overleftarrow{د ب}$ ، $\overleftarrow{د ص}$

	أ	ب	حـ	ء	د	و
ل	١	٣	٢	٤	١٥	٥
س	$\frac{ل}{٢}$	ل	$\frac{ل}{٢}$	$-\frac{ل}{٢}$	$-ل$	$-\frac{ل}{٢}$
ص	$\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	٠	$\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	٠	$\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{١ \times \frac{ل}{٢} + ٢ \times ل + ٢ \times \frac{ل}{٢} + ٤ \times (-\frac{ل}{٢}) + ١٥ \times (-ل) + ٥ \times (-\frac{ل}{٢})}{١ + ٣ + ٢ + ٤ + ١٥ + ٥}$

$= -\frac{ل}{٢}$

$ص_م = \frac{١ \times \frac{ل\sqrt{٣}}{٢} + ٢ \times (-\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}) + ٤ \times (-\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}) + ٥ \times \frac{ل\sqrt{٣}}{٢}}{١ + ٣ + ٢ + ٤ + ١٥ + ٥}$

= صفر

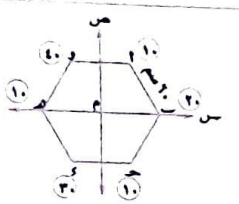
∴ مركز الثقل «م» = $(-\frac{ل}{٢} ، ٠)$

، د م = $\sqrt{(-\frac{ل}{٢})^٢ + ٠^٢} = \frac{ل}{٢}$

أ.أ: مركز ثقل المسدس يقع على $\overline{ب د}$

وعلى بعد $\frac{ل}{٢}$ سم من د

١٦



نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م د}$

	أ	ب	حـ	ء	د	و
ل	١٠	٢٠	١٠	٣٠	١٠	٤٠
س	٣٠	٦٠	٣٠	٣٠-	٦٠-	٣٠-
ص	$٣٠\sqrt{٣}$	٠	$-٣٠\sqrt{٣}$	$-٣٠\sqrt{٣}$	٠	$٣٠\sqrt{٣}$

$س_م = \frac{٣٠ \times ١٠ + ٣٠ \times ٢٠ + ٣٠ \times ١٠ + ٣٠- \times ٣٠ + ٦٠- \times ١٠ + ٤٠- \times ٣٠}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ٦٠ + ٤٠}$

$= -٧,٥$

$ص_م = \frac{٣٠\sqrt{٣} \times ١٠ + ٣٠\sqrt{٣} \times ٢٠ + ٣٠\sqrt{٣} \times ١٠ - ٣٠\sqrt{٣} \times ٣٠ - ٣٠\sqrt{٣} \times ٤٠}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ٦٠ + ٤٠}$

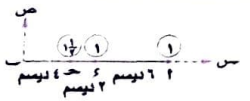
$= ٢,٥\sqrt{٣}$

∴ مركز الثقل = $(-٧,٥ ، ٢,٥\sqrt{٣})$

، بُعد مركز الثقل عن مركز المسدس

= $\sqrt{(-٧,٥)^٢ + (٢,٥\sqrt{٣})^٢} = ٥\sqrt{٣}$ سم

١٧



∴ نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

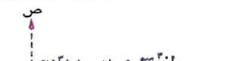
	أ	ء	حـ
ل	١	١	$١\frac{١}{٢}$
س	١٢	٦	٤

∴ $س_م = \frac{١ \times ١٢ + ٦ \times ١ + ١\frac{١}{٢} \times ٤}{١ + ١ + ١\frac{١}{٢}} = ٦\frac{٦}{٧}$

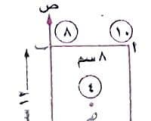
أ.أ: مركز الثقل يبعد عن أ بمقدار = $١٢ - ٦\frac{٦}{٧}$

$= ٥\frac{١}{٧}$ ديسيمتر

١٨



٢٠



	أ	ب	حـ
ل	٣	٤	١٢
س	٠	ل	$ل\frac{١}{٢}$
ص	٠	٠	$\sqrt{٣}$

$س_م = \frac{٢٨٠ \times ٥ + ٢٠٠ \times ٥ + ٥٢٠(-٥) + ٤٤٠(-٥)}{٢٨٠ + ٢٠٠ + ٥٢٠ + ٤٤٠ + ١٦٠}$

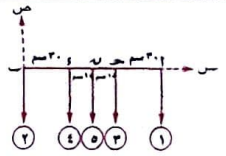
$= -١\frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{٢} \times ٢٨٠ + \frac{٣}{٢} \times ٢٠٠ + \frac{٣}{٢} \times ٥٢٠ + \frac{٣}{٢} \times ٤٤٠ +$

أى أن : مركز الثقل يبعد عن أ بمقدار = ١٢ − $6\frac{6}{7}$

= $5\frac{1}{7}$ ديسيمتر

١٨



نختار اتجاهين متعامدين س س ، ص ص

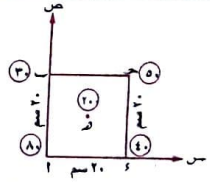
	أ	ح	ء	ب	
ك	١	٣	٥	٤	٢
س	٩٠	٦٠	٤٥	٣٠	٠

$س_م = \frac{٤ \times ٣٠ + ٥ \times ٤٥ + ٣ \times ٦٠ + ١ \times ٩٠}{٢ + ٤ + ٥ + ٣ + ١} = ٤١$

أى أن : مركز الثقل يبعد عن ب ٤١ سم

أ ، ٤٩ سم عن أ

١٩



نختار الاتجاهين المتعامدين أ س ، أ ص

	أ	ب	ح	ء	د
ك	٨٠	٣٠	٥٠	٤٠	٢٠٠
س	٠	٢٠	٢٠	٠	١٠
ص	٠	٢٠	٢٠	٠	١٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

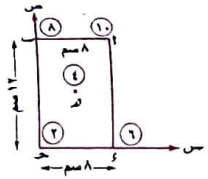
$س_م = \frac{٢٠ \times ٤٠ + ٢٠ \times ٥٠ + ١٠ \times ٢٠٠}{٨٠ + ٣٠ + ٥٠ + ٤٠ + ٢٠٠} = ٩,٥$

أى أن : مركز الثقل يبعد ٩,٥ سم عن أ ب

$ص_م = \frac{٣٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٥٠ + ٢٠ \times ١٠٠}{٨٠ + ٣٠ + ٥٠ + ٤٠ + ٢٠٠} = ٩$

أى أن : مركز الثقل يبعد ٩ سم عن أ ء

٢٠



نختار الاتجاهين المتعامدين ح س ، ح ص

	أ	ب	ح	ء	د
ك	١٠	٨	٢	٦	٤
س	٨	٠	٠	٨	٤
ص	١٢	١٢	٠	٠	٦

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

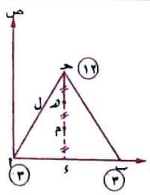
$س_م = \frac{١٠ \times ٨ + ٨ \times ٦ + ٤ \times ٤}{١٠ + ٨ + ٢ + ٦ + ٤} = ٤,٨$

أى أن : مركز الثقل يبعد ٤,٨ سم عن ح ب

$ص_م = \frac{١٠ \times ١٢ + ٨ \times ١٢ + ٤ \times ٦}{١٠ + ٨ + ٢ + ٦ + ٤} = ٨$

أى أن : مركز الثقل يبعد ٨ سم عن ح ء

٢١



بتوزيع الكتلة ٣ كجم على الرؤوس أ ، ب ، ح

لتصبح كتلة عند أ = ٣ كجم

، عند ب = ٣ كجم

، عند ح = ١٢ كجم

، باختيار اتجاهين متعامدين أ س ، أ ص

، بفرض أن طول ضلع المثلث «ل»

∴ ح ء = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل ∴ م = $\left(\frac{١}{٢}ل ، \frac{\sqrt{٣}}{٦}ل\right)$

، د = $\left(\frac{١}{٢}ل ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل\right)$

$س_م = \frac{٤ \times ٣٠ + ٥ \times ٤٥ + ٣ \times ٦٠ + ١ \times ٩٠ + ٠ \times ٠}{٣ + ٤ + ٢ + ٦ + ١٠} = ٣,٢$

$ص_م = \frac{٣ \times ٠ + ٤ \times ٦ + ٢ \times ٤ + ٤ \times ٢ + ٠ \times ١٠}{٣ + ٤ + ٢ + ٦ + ١٠} = ٢,٠٨$

	أ	ب	ح	ء
ك	٦,٥	٣,٥	١,٥	٨,٥
س	٤	٠	٤	٨
ص	٨	٠	٨-	٠

$ص_م = \frac{٣ \times ٠ + ٤ \times ٦ + ١ \times ٤ + ٠ \times ٢ + ٠ \times ٤}{٣ + ٤ + ٢ + ٦ + ١٠} = ٠$

= صفر

∴ مركز الثقل م = $\left(\frac{ل}{٢}- ، ٠\right)$

، ل م = $\sqrt{٠ + \left(\frac{ل}{٢}-\right)^{٢}} = \frac{ل}{٢}$

	أ	ب	ح
ك	٣	٣	١٢
س	٠	ل	$\frac{١}{٢}$ل
ص	٠	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ل

$س_م = \frac{٣ \times ل + ١٢ \times \frac{١}{٢}ل}{٣ + ٣ + ١٢} = \frac{١}{٢}ل$

$ص_م = \frac{٣ \times ل + ١٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}ل}{٣ + ٣ + ١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل$

∴ مركز ثقل المجموعة = $\left(\frac{١}{٢}ل ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل\right)$

بالنسبة للنقطة «أ» وهو نفس إحداثيات النقطة د (منتصف أ ح)

حل آخر : الكتلتان ٣ كجم ، ٣ كجم المؤثرتان فى أ ، ب نستعيض عنهما بكتلة ٦ كجم وتؤثر فى النقطة ء منتصف أ ب

∴ مركز ثقل المجموعة يقع على ء ح وليكن د

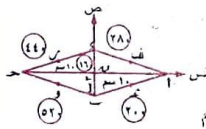
حيث ٦ × ء د = ١٢ × د ح

∴ ح د = $\frac{١}{٣}$ ء د = $\frac{١}{٢}$ ح ء

∴ د منتصف أ ح

٢٢

من هندسة الشكل :



أ ح = ٢٠ سم

، أ ب = ب ح = ١٠ سم

، ∵ ء ب = ٦ سم ∴ ء ب = ب ب = ٣ سم

ونختار الاتجاهين المتعامدين ب س ، ب ص

	ف	د	ى	ك	ب
ك	٢٨٠	٢٠٠	٥٢٠	٤٤٠	١٦٠
س	٥	٥	٥-	٥-	٠
ص	$\frac{٣}{٢}$	$\frac{٣}{٢}$-	$\frac{٣}{٢}$-	$\frac{٣}{٢}$	٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{٢٨٠ \times ٥ + ٢٠٠ \times ٥ + ٥٢٠ \times (٥-) + ٤٤٠ \times (٥-)}{٢٨٠ + ٢٠٠ + ٥٢٠ + ٤٤٠ + ١٦٠}$

$= -1\frac{١}{٢}$

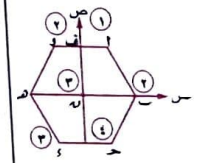
$ص_م = \frac{٢٨٠ \times \frac{٣}{٢} + ٢٠٠ \times \frac{٣}{٢}- + ٥٢٠ \times \frac{٣}{٢}- + ٤٤٠ \times \frac{٣}{٢}}{٢٨٠ + ٢٠٠ + ٥٢٠ + ٤٤٠ + ١٦٠}$

= صفر

∴ مركز الثقل = $\left(-1\frac{١}{٢} ، ٠\right)$

أى أن : مركز الثقل يقع على أ ح وعلى بعد ١,٥ سم من مركز المعين.

٢٣



من هندسة الشكل :

ف أ = $\frac{١٥}{٢}$ سم

، ح أ = ١٥ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

، ب ف = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم

حيث ب مركز السداسى

وباختيار اتجاهين متعامدين ب س ، ب ص

	أ	ب	ح	ء	ى	ب
ك	١	٢	٤	٣	٢	٣
س	$\frac{١٥}{٢}$	١٥	$\frac{١٥}{٢}$	$\frac{١٥}{٢}$-	$\frac{١٥}{٢}$-	٠
ص	$\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$	٠	$\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$-	$\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$-	$\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$	٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$س_م = \frac{١ \times \frac{١٥}{٢} + ٢ \times ١٥ + ٤ \times \frac{١٥}{٢}- + ٢ \times \frac{١٥}{٢}- + ٢}{١ + ٢ + ٤ + ٣ + ٢ + ٣} = ٢$

$ص_م = \frac{١ \times \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢} + ٤ \times \left(\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}-\right) + ٢ \times \left(\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}-\right) + ٢ \times \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}}{١ + ٢ + ٤ + ٣ + ٢ + ٣}$

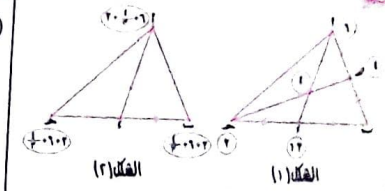
$= -٢\sqrt{٣}$

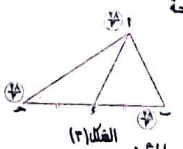
∴ مركز الثقل م = $\left(٢ ، -٢\sqrt{٣}\right)$

، م ب = $\sqrt{(٢)^{٢} + \left(٢\sqrt{٣}\right)^{٢}}$ = ٤ سم

∴ مركز ثقل المجموعة يبعد ٤ سم عن مركز السداسى.

٤٣





- نستعيض عن كتلة الصفيحة المثلثة بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها $\frac{1}{3}$ ١ $\frac{4}{3}$ كجم عند رؤوس المثلث.
- وكذلك الكتلة ٤ كجم عند منتصف $\overline{أب}$ نستعيض عنها بكتلتين متساويتين عند الرأسين أ ، ب مقدار كل منهما $\frac{4}{2}$ = ٢ كجم
- كذلك الكتلة ١٢ كجم عند منتصف $\overline{بحـ}$ نستعيض عنها بكتلتين متساويتين عند الرأسين ب ، حـ مقدار كل منهما ٦ كجم
- فتصبح جميع الكتل عبارة عن ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها $\frac{28}{3}$ كجم مثبتة عند رؤوس المثلث الثلاثة.

∴ مركز ثقلها ينطبق على مركز ثقل المثلث.

حل آخر :

نلاحظ من الشكل الأول أن مركز ثقل الكتلتين (٦) عند أ ، (١٢) عند ء يقع على $\overline{أء}$ ويقسمها بنسبة ٢ : ١ من جهة أ أى يقع عند نقطة م

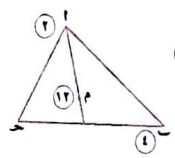
مركز ثقل الكتلتين (٢) عند حـ ، (٤) عند د يقع على $\overline{حـد}$ ويقسمها بنسبة ٢ : ١ من جهة حـ أى يقع عند نقطة م

الكتلة (٤) عند م

∴ مركز ثقل المجموعة كلها يقع عند نقطة م

أى عند نقطة ملتقى متوسطات المثلث.

٤٥

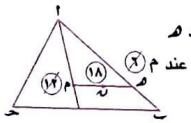


① الكتل ٤ جم عند أ ، ٤ جم عند ب ، ٤ جم عند حـ يستعاض عنها بكتلة واحدة مقدارها ١٢ جم

عند م مركز ثقل المثلث أ ب حـ ويتبقى كتلة ٢ جم عند أ ، كتلة ٤ جم عند ب

② الكتلة ٢ جم المثبتة عند أ ، الكتلة ٤ جرام المثبتة عند ب يستعاض عنها بكتلة ٦ جرام عند د تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ١

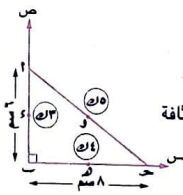
∴ $\overleftrightarrow{مد}$ // $\overleftrightarrow{بحـ}$



③ الكتلة ٦ جم المثبتة عند د ، الكتلة ١٢ جم المثبتة عند م يستعاض عنهما بكتلة واحدة ١٨ جم مثبتة عند (هـ) حيث هـ تقسم $\overline{مد}$ بنسبة ١ : ٢

٤٦

من هندسة الشكل :



حـ أ = ١٠ سم

∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن إعتباره مكونًا من ثلاثة قضبان منتظمة من نفس المادة وحيث أن النسبة بين أطوالها

٦ : ٨ : ١٠ = ٣ : ٤ : ٥

∴ نعتبر الكتل ٣ ك ، ٤ ك ، ٥ ك على الترتيب ومركز ثقل كل منها عند منتصفه نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{بس}$ ، $\overleftrightarrow{بص}$

الكتلة	٣ ك	٤ ك	٥ ك
س	٠	٤	٤
ص	٣	٠	٣

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$س_م = \frac{٣ك \times ٠ + ٤ك \times ٤ + ٥ك \times ٤}{٣ك + ٤ك + ٥ك} = ٣$$

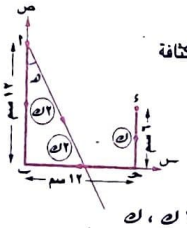
$$ص_م = \frac{٣ك \times ٣ + ٥ك \times ٣}{١٢ك} = ٢$$

∴ مركز الثقل = (٣ ، ٢)

∴ بُعد مركز ثقل السلك عن $\overline{بأ}$ = ٣ سم

، عن $\overline{بحـ}$ = ٢ سم

٤٧



∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

، ∵ النسبة بين الاطوال

= ١٢ : ١٢ : ٦

= ٢ : ٢ : ١

∴ نعتبر الكتل ٢ ك ، ٢ ك ، ك

ومركز ثقل كل منها عند منتصفه

، ناخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بأ}$

الكتلة	٢ ك	٢ ك	ك
س	٠	٦	١٢
ص	٦	٠	٣

$$س_م = \frac{٢ك \times ٦ + ك \times ١٢}{٢ك + ٢ك + ك} = ٤,٨$$

$$ص_م = \frac{٢ك \times ٦ + ك \times ٣}{٢ك + ٢ك + ك}$$

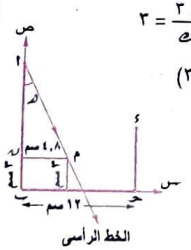
∴ مركز الثقل = (٤,٨ ، ٣)

، عند التعليق من أ :

أ د = ١٢ − ٣ = ٩ سم

∴ ظا هـ = $\frac{٤,٨}{٩}$

∴ ق (∠ هـ) = ٢٨° ٤′

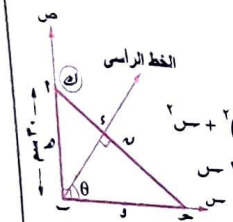


أى أن : $\overline{أب}$ يميل عند الرأسى بزاوية ٢٨° ٤′ إذا علق السلك من أ تعليقًا حرًا.

٤٨

بفرض أن :

ب حـ = س



∴ أ حـ = ٩٠ − س .

∴ (٩٠ − س)^{٢} = (٣٠)^{٢} + س^{٢}

∴ ٨١٠٠ + س^{٢} − ١٨٠ س = س^{٢} + ٩٠٠

∴ ١٨٠ س = ٧٢٠٠ ∴ س = ٤٠ سم

∴ ب حـ = ٤٠ سم ، أ حـ = ٥٠ سم

نستعيض عن كتلة السلك بثلاث كتل بنسبة ٣٠ : ٤٠ : ٥٠ عند منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$

∴ الكتلة عند هـ = ١٥٠ جرام

، الكتلة عند د = ٢٠٠ جرام

، الكتلة عند هـ = ٢٥٠ جرام

	هـ	د	هـ	أ
ك	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	١٥	٠	١٥	٣٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$س_م = \frac{٢٠٠ \times ٢٠ + ٢٠٠ \times ٢٥٠ + ١٥٠ \times ٢٠}{٦٠٠ + ك} = \frac{٩٠٠٠}{٦٠٠ + ك}$$

$$ص_م = \frac{١٥٠ \times ١٥ + ١٥٠ \times ٢٥٠ + ٣٠ \times ك}{١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + ك}$$

$$= \frac{٦٠٠٠ + ٣٠ ك}{٦٠٠ + ك}$$

ومن هندسة الشكل :

ب ء = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$ = ٢٤ سم ، حـ ء = ٣٢ سم

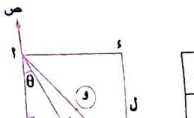
، ظا θ = $\frac{حـ ء}{ء ب} = \frac{٣٢}{٢٤} = \frac{٤}{٣}$

$$\frac{٦٠٠٠ + ٣٠ ك}{٦٠٠ + ك} \times \frac{٦٠٠ + ك}{٩٠٠٠} = \frac{٤}{٣}$$

∴ ٣٦٠٠٠ = ١٨٠٠٠ + ٩٠ ك

∴ ك = ٢٠٠ جم

٤٩



	ك	د	$\frac{1}{4}$ د
س	$\frac{1}{2}$ ل	٠	٠
ص	٠	ل	$\frac{1}{4}$ ل

∴ م حـ = ١٥ $\sqrt{3}$ سم ، ق (∠ م حـ هـ) = ٣٠°

هـ حـ = م حـ جتا ٣٠° ∴ هـ حـ = ١٥ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ هـ حـ = ٢٢,٥ سم

∴ ب هـ = ٤٠ − ٢٢,٥ = ١٧,٥ سم

∴ ب م = ١٧,٥ − ١٥ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠°

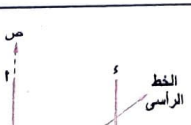
= ١٧,٥ − ١٥ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

= ١٧,٥ − ٢٢,٥ = −٥ سم

∴ م تقع على بعد ٥ سم من ب على $\overleftrightarrow{بأ}$ فى الاتجاه المضاد لاتجاه $\overrightarrow{بأ}$

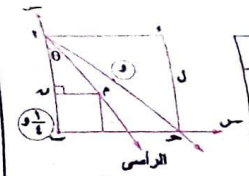
• **عند التعليق من ب :**

نرسم $\overleftrightarrow{بم}$ فيكون هو الخط الرأسى



$$س_م = \frac{٢ك \times ٥ل}{٣ك} = \frac{١٠}{٣} ل$$

$$ص_م = \frac{ك \times ٢,٥ل}{٣ك} = \frac{٥}{٦} ل$$



ك	و	$\frac{1}{4}$ و
س	$\frac{1}{2}$ ل	.
ص	$\frac{1}{2}$ ل	.

∴ س$_م$ = $\frac{و \times \frac{1}{2}ل}{و + \frac{1}{4}و}$ = $\frac{2}{5}$ ل ، ص$_م$ = $\frac{و \times \frac{1}{2}ل}{و + \frac{1}{4}و}$ = $\frac{2}{5}$ ل

∴ مركز الثقل = ($\frac{2}{5}$ ل ، $\frac{2}{5}$ ل)

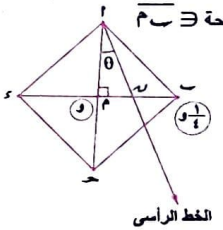
∴ م ب = $\frac{2}{5}$ ل ، أ ب = $\frac{2}{5}$ ل

∴ ظا θ = $\frac{2}{5}$ ل ÷ $\frac{2}{5}$ ل = $\frac{2}{3}$

∴ ق (د حـ أ م) = ٤٥° − ق (د θ)

∴ ظا (حـ أ م) = $\frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1}$ = $\frac{1}{5}$

حل آخر : مركز ثقل الصفيحة ∈ $\overline{ب م}$



∴ $\frac{م ب}{ب ء}$ = $\frac{1}{4}$

∴ $\frac{م ب}{م ء}$ = $\frac{1}{5}$

∵ م ب = م أ

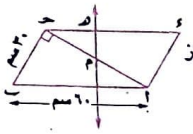
∴ $\frac{م ب}{م أ}$ = $\frac{1}{5}$

∴ فى وضع الاتزان يكون $\overleftarrow{أ ب}$ هو الخط الرأسى

فى Δ أ ب م : ظا θ = $\frac{1}{5}$

٣٠

∵ الخط الرأسى المار بنقطة التعليق لابد وأن يمر بمركز ثقل الصفيحة



∴ $\overleftarrow{هـ م}$ هو الخط الرأسى

∵ $\overline{حـ ء}$ أفقى ∴ ق (د م هـ حـ) = ٩٠°

∵ $\overline{ب حـ}$ = $\frac{1}{2}$ $\overline{أ ب}$

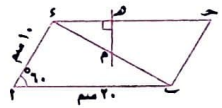
فى Δ القائم أ حـ ب

∴ ق (د حـ أ ب) = ٣٠° ∴ $\overline{أ حـ}$ = ٣٠ $\sqrt{3}$ سم ∴ ق (د م حـ ص) = ٣٠°

∴ $\overline{هـ حـ}$ = $\overline{م حـ}$ منا ٣٠° ∴ $\overline{هـ حـ}$ = ١٥ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\overline{هـ حـ}$ = ٢٢,٥ سم

٣١



∵ (س ء)^2 = (٢٠)^2 + (١٠)^2 − ٢ × ٢٠ × ١٠ × منا ٦٠°

∴ س ء = ١٠ $\sqrt{3}$ ∴ م ء = ٥ $\sqrt{3}$

∴ ق (د س ء أ) = ٩٠° ومنها ق (د س ء حـ) = ٣٠°

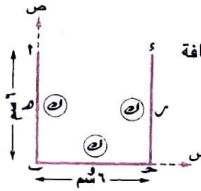
∴ ء هـ = م ء منا ٣٠°

∴ ء هـ = ٥ $\sqrt{3}$ × منا ٣٠ = ٧,٥ سم

٣٢

∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكونًا من ثلاثة قضبان منتظمة من نفس المادة وكتلة كل منها ك ويؤثر عند منتصف القضيب



ونختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

الكتلة	ك	و	هـ
س	.	٣	٦
ص	٣	.	٣

∴ س$_م$ = $\frac{ك \times ٣ + ك \times ٦}{ك + ك + ك}$ = ٣

∴ بعد مركز الثقل عن $\overline{أ ب}$ = ٣ سم

، ص$_م$ = $\frac{ك \times ٣ + ك \times ٣}{٣ ك}$ = ٢

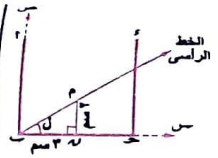
∴ بُعد مركز الثقل عن $\overline{ب حـ}$ = ٢ سم

• عند التعليق من ب :

نرسم $\overline{ب م}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ب

ونرسم $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

ونفرض أن : ل هو قياس زاوية ميل $\overline{ب حـ}$ على $\overleftarrow{ب م}$

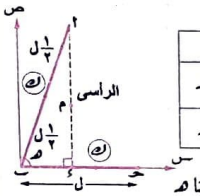


∴ فى Δ م ب هـ نجد أن : ظا ل = $\frac{2}{3}$ = ٠,٦٦٦٧

∴ ل ≈ ٤١° ٣٣

٣٣

الكتلة	ك	ك
س	$\frac{ل}{2}$	$\frac{1}{2}$ ل منا هـ
ص	.	$\frac{1}{2}$ ل منا هـ



س$_م$ = $\frac{\frac{ل}{2} \times ك + \frac{1}{2}ل ك منا هـ}{ك + ك}$

= $\frac{1}{4}$ ل + $\frac{1}{4}$ ل منا هـ

ص$_م$ = $\frac{ك \times \frac{1}{2}ل منا هـ}{ك + ك}$ = $\frac{1}{4}$ ل منا هـ

، ∵ $\overline{ب حـ}$ أفقيًا

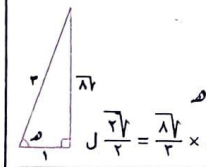
∴ منا هـ = $\frac{ب ء}{أ ب}$ = $\frac{\frac{1}{4}ل + \frac{1}{4}ل منا هـ}{ل}$ = $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ منا هـ

∴ منا هـ = $\frac{1}{3}$

∴ أ م = أ ء − ء م

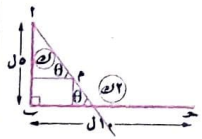
= ل منا هـ − $\frac{1}{4}$ ل منا هـ

= $\frac{3}{4}$ ل منا هـ = $\frac{3}{4}$ ل × $\frac{\sqrt{8}}{3}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ل

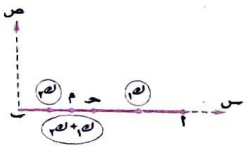


٣٤

الكتلة	٢ ك	ك
س	٥ ل	.
ص	.	٢,٥ ل



٣٥



نفرض أن طول القضيب $\overline{أ ب}$ = ل

والقضيب $\overline{أ حـ}$ كتلته ك$_١$ عند منتصفه

، القضيب $\overline{حـ ب}$ كتلته ك$_٢$ عند منتصفه ومركز ثقل القضيب كله هو م حيث م ب = $\frac{1}{3}$ ل

ونختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

الكتلة	ك$_١$	ك$_٢$
س	$\frac{3}{4}$ ل	$\frac{1}{4}$ ل

∴ س$_م$ = $\frac{ك_١ \times \frac{3}{4}ل + ك_٢ \times \frac{1}{4}ل}{ك_١ + ك_٢}$

، ∵ س$_م$ = $\frac{1}{3}$ ل

∴ $\frac{1}{3}$ ل = $\frac{ل(\frac{3}{4}ك_١ + \frac{1}{4}ك_٢)}{ك_١ + ك_٢}$

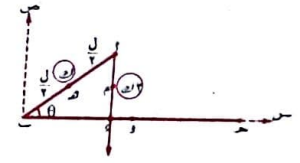
∴ $\frac{1}{3}$ = $\frac{\frac{3}{4}ك_١ + \frac{1}{4}ك_٢}{ك_١ + ك_٢}$

∴ $\frac{1}{3}$ = $\frac{3ك_١ + ك_٢}{4ك_١ + 4ك_٢}$

∴ ٩ ك$_١$ + ٣ ك$_٢$ = ٤ ك$_١$ + ٤ ك$_٢$

∴ ٥ ك$_١$ = ك$_٢$ ∴ ك$_١$: ك$_٢$ = ١ : ٥

٣٦



نفرض أن كتلة القضيب $\overline{أ ب}$ هى ك

ومثبتة عند منتصفه د

∴ كتلة القضيب $\overline{ب ح}$ = ٢ ك ومثبته عند منتصفه و

، ∵ أ ب = ل ∴ ب د = $\frac{ل}{٢}$

، ∵ أ هى نقطة التعليق

، $\overline{ب ح}$ أفقى ∴ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب ح}$

∴ مركز ثقل المجموعة يقع على $\overline{أ ء}$

∴ س$_م$ = ل مَا θ

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

الكتلة	٢ ك	ك
س	ل	$\frac{ل}{٢}$ مَا θ
ص	٠	$\frac{ل}{٢}$ مَا θ

∴ س$_م$ = $\frac{٢ ك \times ل + ك \times \frac{ل}{٢} مَا θ}{٣ ك}$ = $\frac{٤ ل + ل مَا θ}{٦}$

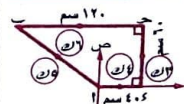
، ∵ س$_م$ = ل مَا θ

∴ ل مَا θ = $\frac{٤ ل + ل مَا θ}{٦}$

∴ ٦ مَا θ = ٤ + مَا θ ∴ ٥ مَا θ = ٤

∴ مَا θ = $\frac{٤}{٥}$ ∴ θ = ٥٢° ٣٦′

٣٧



أ ء : ء حـ : حـ ب : ب أ

= ٤٠ : ٦٠ : ١٢٠ : ١٠٠

= ٢ : ٣ : ٦ : ٥

، ∵ كثافة الجزء $\overline{أ ء}$ ضعف كثافة الباقى

∴ النسبة بين كتل هذه الأجزاء كما يلى :

أ ء : ء حـ : حـ ب : ب أ

= ٤ ك : ٣ ك : ٦ ك : ٥ ك

وتؤثر فى منتصف كل إطار على حدة

الكتلة	٤ ك	٣ ك	٦ ك	٥ ك
س	٢٠	٤٠	-٢٠	-٤٠
ص	٠	٣٠	٦٠	٣٠

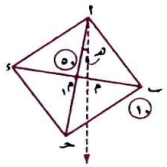
س$_م$ = $\frac{٤ ك \times ٢٠ + ٣ ك \times ٤٠ - ٦ ك \times ٢٠ + ٥ ك \times -٤٠}{٤ ك + ٣ ك + ٦ ك + ٥ ك}$

= $\frac{-٢٠}{٣}$

، ص$_م$ = $\frac{٣ ك \times ٣٠ + ٦ ك \times ٦٠ + ٥ ك \times ٣٠}{٤ ك + ٣ ك + ٦ ك + ٥ ك}$ = $\frac{١٠٠}{٣}$

∴ مركز الثقل = $\left(\frac{-٢٠}{٣} ، \frac{١٠٠}{٣}\right)$

٣٨



الخط الرأسى

ليكن م$_١$ هو مركز

ثقل الصفيحة المربعة

، م هو مركز ثقل

المجموعة المكونة من وزن الصفيحة

والثقل عند ب وعند وضع الاتزان تكون نقطة (م) واقعة

على الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ وفى الوقت

نفسه تكون م ∈ $\overline{م_١ ب}$

وتتحقق العلاقة $\frac{م م_١}{م ب}$ = $\frac{١٠}{٥٠}$ = $\frac{١}{٥}$

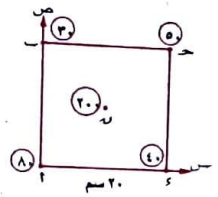
∴ م م$_١$ = $\frac{١}{٥}$ م$_١$ ب

∴ م م$_١$ = $\frac{١}{٦}$ م$_١$ ب ولكن م$_١$ ب = أ م$_١$

∴ ظا θ = $\frac{م م_١}{أ م_١}$ = $\frac{\frac{١}{٦} م_١ ب}{م_١ ب}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ θ = ٩° ٢٨

٣٩



٢٠ سم

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أ س}$ ، $\overleftarrow{أ ص}$

الكتلة	أ	ب	حـ	ء	د
ك	٨٠	٣٠	٥٠	٤٠	٢٠٠
س	٠	٠	٢٠	٢٠	١٠
ص	٠	٢٠	٢٠	٠	١٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٥٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٤٠ + ٢٠ \times ٥٠ + ١٠ \times ٢٠٠}{٨٠ + ٣٠ + ٥٠ + ٤٠ + ٢٠٠}$ = ٩ $\frac{١}{٢}$

، ص$_م$ = $\frac{٣٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٥٠ + ٢٠٠ \times ١٠}{٨٠ + ٣٠ + ٥٠ + ٤٠ + ٢٠٠}$ = ٩

∴ مركز الثقل م = $\left(٩ \frac{١}{٢} ، ٩\right)$

ثم نرسم $\overleftarrow{أ م}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة

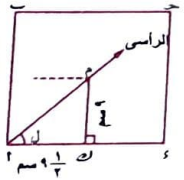
التعليق أ

نرسم $\overline{م ك} \perp \overline{أ ء}$

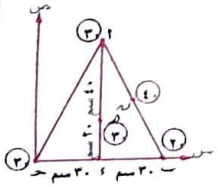
∴ فى Δ م ك أ يكون

ظا ل = $\frac{م ك}{ك أ}$ = $\frac{٩}{٩,٥}$

∴ ق (∠ ل) ≈ ٢٧′ ٤٣°



٤٠



أ ء = ٦٠ سم

∴ كتلة الصفيحة تكون

مثبتة عند مركز ثقلها د

نختار اتجاهين متعامدين

$\overleftarrow{ح س}$ ، $\overleftarrow{ح ص}$

الكتلة	أ	ب	حـ	ء	د
ك	٣٠	٢٠	٣٠	٣٠	٤٠
س	٣٠	٦٠	٠	٣٠	٤٥
ص	٦٠	٠	٠	٢٠	٣٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٣٠ \times ٢٠ + ٦٠ \times ٢٠ + ٣٠ \times ٣٠ + ٤٥ \times ٤٠}{٤٠ + ٣٠ + ٣٠ + ٢٠ + ٣٠}$ = ٣٢

، ص$_م$ = $\frac{٣٠ \times ٦٠ + ٢٠ \times ٣٠ + ٣٠ \times ٤٠ + ٢٤ \times ٣٠}{٤٠ + ٣٠ + ٣٠ + ٢٠ + ٣٠}$ = ٢٤

∴ مركز الثقل = (٣٢ ، ٢٤)

∴ م حـ = $\sqrt{(٣٢)^٢ + (٢٤)^٢}$ = ٤٠

∴ مركز ثقل المجموعة يبعد عن الرأس حـ بمقدار ٤٠ سم

نرسم $\overline{ب م}$ فيكون هو

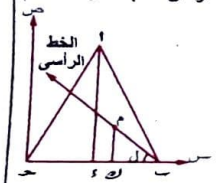
الخط الرأسى المار بنقطة

التعليق ب ثم نرسم

$\overline{م ك} \perp \overline{ب حـ}$

فى Δ ب ك م

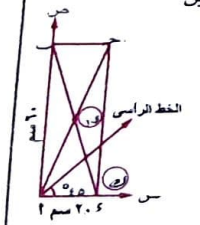
ظا ل = $\frac{م ك}{ك ب}$ = $\frac{٢٤}{٣٨}$ = $\frac{٦}{٧}$ ∴ ق (∠ ل) = ٣٦° ٤٠′



٤١

باتخاذ $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ اتجاهين متعامدين

الكتلة	و$_١$	ك
س	١٠	٢٠
ص	٣٠	٠



∴ س$_م$ = $\frac{١٠ و_١ + ٢٠ ك}{و_١ + ك}$

، ص$_م$ = $\frac{٣٠ و_١}{و_١ + ك}$

، ∵ $\overline{أ ء}$ يصنع مع الرأسى زاوية قياسها ٤٥°

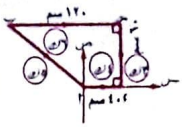
، ∵ ظا ٤٥° = ١ ∴ س$_م$ = ص$_م$

∴ ١٠ و$_١$ + ٢٠ ك = ٣٠ و$_١$

∴ ٢٠ ك = ٢٠ و$_١$ ∴ ك = و$_١$

∴ الثقل المثبت عند ء يساوى وزن الصفيحة

٣٧



∵ ق(∠ أ) : ق(∠ ب) : ق(∠ ح) : ق(∠ ء)

= ٤٠ : ٦٠ : ١٢٠ : ١٠٠

= ٢ : ٣ : ٦ : ٥

∴ كثافة الجزء $\overline{أء}$ ضعف كثافة الباقى

وتتحقق العلاقة $\frac{م_١ب}{م_١أ} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

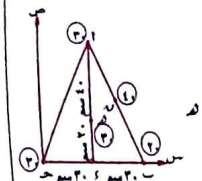
∴ م م$_١$ = $\frac{١}{٥}$ م$_١$ب

∴ م م$_١$ = $\frac{١}{٦}$ م$_١$ب ولكن م$_١$ب = أ م$_١$

∴ ظا ل = $\frac{م م_١}{م_١ أ} = \frac{\frac{١}{٦} م_١ ب}{م_١ ب} = \frac{١}{٦}$

∴ ل = ٩° ٢٨′

٣٨



أء = ٦٠ سم

∴ كتلة الصفيحة تكون مثبتة عند مركز ثقلها ك

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{حس}$ ، $\overleftrightarrow{حص}$

٤١

∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكونًا من ٤ قضبان منتظمة هى $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حء}$ ، $\overline{ءأ}$ حيث

أب = ٢٠ سم

أب : بحـ : حء : ءأ

= ٢٠ : ٨ : ١٢ : ٢٤

= ٥ : ٢ : ٣ : ٦

∴ نفرض أن كتلة $\overline{أب}$ تساوى ٥ ك ، كتلة $\overline{بحـ}$ تساوى ٢ ك ، كتلة $\overline{حء}$ تساوى ٣ ك وكتلة $\overline{ءأ}$ تساوى ٦ ك وكل يؤثر عند منتصف القضيب.

الكتلة	٥ ك	٢ ك	٣ ك	٦ ك
س	٦	١٢	٦	٠
ص	١٦	٤	٠	١٢

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٥ك \times ٦ + ٢ك \times ١٢ + ٣ك \times ٦ + ٦ك \times ٠}{٥ك + ٢ك + ٣ك + ٦ك}$ = $٤\frac{١}{٢}$

∴ مركز ثقل السلك يبعد عن $\overleftrightarrow{أء}$ بمقدار $٤\frac{١}{٢}$ سم

، ص$_م$ = $\frac{٥ك \times ١٦ + ٢ك \times ٤ + ٦ك \times ١٢}{٥ك + ٢ك + ٣ك + ٦ك}$ = ١٠

∴ مركز ثقل المجموعة يبعد عن $\overleftrightarrow{ءحـ}$ بمقدار ١٠ سم

∴ مركز الثقل = $(٤\frac{١}{٢} ، ١٠)$

نصل حـ م فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق حـ

ونرسم $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{بحـ}$

ويفرض أن ل هو قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{حء}$ على الرأسى

∴ فى Δ م ن حـ يكون : ظا ل = $\frac{م ن}{ن حـ} = \frac{١٠}{٤,٥ - ١٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ ق(∠ ل) ≈ ٥٣° ٨′

٤٢

من هندسة الشكل :

ء و = ٣ سم

∴ ب ك = ء و = وحـ = ٣ سم

أك = ٤ سم

• ∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكونًا من أربعة قضبان منتظمة هى $\overline{ءأ}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حء}$

والنسبة بين أطوالها هى ٣ : ٥ : ٩ : ٥

∴ نفرض أن كتلها على الترتيب ٣ ك ، ٥ ك ، ٩ ك ، ٥ ك ونختار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{حب}$ ، $\overleftrightarrow{حص}$

الكتلة	٣ ك	٥ ك	٩ ك	٥ ك
س	$٤\frac{١}{٢}$	$٧\frac{١}{٢}$	$٤\frac{١}{٢}$	$١\frac{١}{٢}$
ص	٤	٢	٠	٢

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٣ك \times ٤\frac{١}{٢} + ٥ك \times ٧\frac{١}{٢} + ٩ك \times ٤\frac{١}{٢} + ٥ك \times ١\frac{١}{٢}}{٣ك + ٥ك + ٩ك + ٥ك}$ = $٤\frac{١}{٢}$

، ص$_م$ = $\frac{٣ك \times ٤ + ٥ك \times ٢ + ٩ك \times ٠ + ٥ك \times ٢}{٣ك + ٥ك + ٩ك + ٥ك}$ = $١\frac{٥}{١١}$

∴ مركز الثقل = $(٤\frac{١}{٢} ، ١\frac{٥}{١١})$ بالنسبة للنقطة «حـ»

• **التعليق من أ :**

نعين مركز الثقل (م)

ونرسم $\overleftrightarrow{أم}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ ثم نرسم $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{ءأ}$

ونفرض أن ل هو قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{ءأ}$ على الرأسى

∴ فى Δ م ن أ يكون :

ظا ل = $\frac{م ن}{ن أ} = \frac{\frac{١٠}{١١} - ٤}{\frac{١}{٢} - ٦} = \frac{٥٦}{٣٣}$

∴ ق(∠ ل) ≈ ٥٩° ٢٩′

٤٣

١ (ب)	٢ (د)	٣ (أ)	٤ (ب)
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (ب)	٨ (د)
٩ (د)	١٠ (د)	١١ (د)	١٢ (أ)
١٣ (أ)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (جـ)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (أ)	٢٤ (ب)

٤٤

∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكونًا من ثلاثة قضبان منتظمة هى $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حء}$

وحيث إن النسبة بين أطوالها

أب : بحـ : حء

١٢ : ٨ : ٤ = ٣ : ٢ : ١

∴ نفرض أن كتلة $\overline{أب}$ تساوى ٣ ك ، كتلة $\overline{بحـ}$ تساوى ٢ ك ، كتلة $\overline{حء}$ تساوى ك وكل منها عند منتصف القضيب

ونختار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{بس}$ ، $\overleftrightarrow{بص}$

الكتلة	٣ ك	٢ ك	ك
س	٠	٤	٨
ص	٦	٠	٢

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٣ك \times ٠ + ٢ك \times ٤ + ك \times ٨}{٦ك}$ = $٢\frac{٢}{٣}$

، ص$_م$ = $\frac{٣ك \times ٦ + ٢ك \times ٠ + ك \times ٢}{٦ك}$ = $٢\frac{٢}{٣}$

∴ بعد مركز ثقل السلك عن $\overleftrightarrow{بأ}$ يساوى $٢\frac{٢}{٣}$ سم

، بعده عن $\overleftrightarrow{بحـ}$ يساوى $٣\frac{١}{٣}$ سم

• **عند التعليق من أ :**

نرسم $\overleftrightarrow{أم}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ

يقطع $\overleftrightarrow{بحـ}$ فى ن ثم نرسم $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{أب}$

ونفرض أن ل هو قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{أب}$ على الرأسى

∴ فى Δ م ن أ :

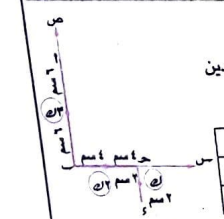
يكون ظا ل = $\frac{م ن}{ن أ}$ = $\frac{٢\frac{٢}{٣}}{٢\frac{١}{٢} - ١٢}$ = $\frac{٤}{١٣}$

، فى Δ أ ب ن : ظا ل = $\frac{ب ن}{أ ب}$

∴ $\frac{٤}{١٣} = \frac{ب ن}{١٢}$ ∴ ب ن = $٣\frac{٩}{١٣}$ سم

∴ الخط الرأسى يقطع الجزء $\overline{بحـ}$ على بُعد $٣\frac{٩}{١٣}$ سم من ب

٤٥



نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{بس}$ ، $\overleftrightarrow{بص}$

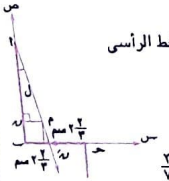
الكتلة	٣ ك	٢ ك	ك
س	٠	٤	٨
ص	٦	٠	-٢

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

س$_م$ = $\frac{٢ك \times ٤ + ك \times ٨}{٦ك}$ = $٢\frac{٢}{٣}$

، ص$_م$ = $\frac{٢ك \times ٦ + ك \times (-٢)}{٦ك}$ = $٢\frac{٢}{٣}$

• **عند التعليق من أ :**



نرسم $\overleftrightarrow{أم}$ فيكون هو الخط الرأسى

ونرسم $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∴ ظا ل = $\frac{م ن}{ن أ}$ = $\frac{٢\frac{٢}{٣}}{٢\frac{١}{٢} - ١٢}$ = $\frac{٢}{٧}$

، فى Δ أ ب ن : ∵ ظا ل = $\frac{ب ن}{أ ب}$

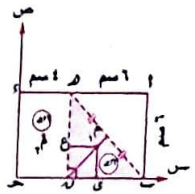
∴ $\frac{٢}{٧} = \frac{ب ن}{١٢}$ ∴ ب ن = $٢\frac{٢}{٧}$ سم

∴ الخط الرأسى يقطع $\overleftarrow{ب حـ}$ فى نقطة $ه$

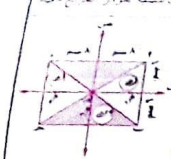
على بُعد $٣\frac{٣}{٧}$ سم من ب

٤٧

باختيار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$


ص
٦سم
ه
٤سم
ء
ك
ك
ك

٥٢



من هندسة الشكل :

ط(Δ ا ب ح) = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٢ = ٧٢ وحدة مساحة

ط(Δ ا ب ء) = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٨ = ٤٨ وحدة مساحة

∴ ط(Δ ا ب ح) : ط(Δ ا ب ء) = ٧٢ : ٤٨ = ٣ : ٢

∴ مساحة المربع ا ب ح ء : مساحة Δ ا ب ح = ٥ : ٣

∴ كتلة الدائرة $د_1$ = ك ، كتلة الدائرة $د_2$ = ٤ ك

∴ مركز ثقل المجموعة يقع داخل $د_2$

⑥ بفرض كتلة المعين

أ ب حـ ء = كتلة المعين

أ ء = و = ك

ومن تماثل الشكل

نجد أن مركز ثقل الشكل

يقع عند (ع) حيث

أ ع = (٠,٩ ل) متر

∵ أ س = أ ء جتا $\frac{\theta}{2}$ = ل جتا $\frac{\theta}{2}$

، أ ع = أ س جتا $\frac{\theta}{2}$ = ل جتا^2 $\frac{\theta}{2}$

، ∵ أ ع = ٠,٩ ل

∴ ل جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ = ٠,٩ ل ∴ جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ = ٠,٩

∴ جتا θ = ٢ جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ − ١ = ٢ × ٠,٩ − ١ = $\frac{٤}{٥}$

٥٨

أ حـ = ٢ أ ب = ٦٠ سم

، ب حـ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ سم

نرسم $\overline{ب ء} \perp \overline{أ حـ}$

عندما يكون $\overline{أ حـ}$ أفقي يكون $\overline{ب ء}$ رأسي

∴ م مركز الثقل يقع على $\overline{ب ء}$ (١)

نرسم $\overline{أ هـ}$ يميل على $\overline{أ حـ}$ بزاوية قياسها ٣٠°

∴ م مركز الثقل يقع على $\overline{أ هـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م هي نقطة تقاطع $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ هـ}$

ب ء = أ ب جتا ٦٠° = ١٥ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{م ء}{م ب} = \frac{أ ء}{أ ب} = \frac{١}{٢}$

∴ ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب ء = $\frac{٢}{٣}$ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ م ل (البُعد عن $\overline{أ ب}$) = ب م جا ٣٠°

= ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

، م ك (البُعد عن $\overline{ب حـ}$) = ب م جتا ٣٠°

= ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٥ سم

، د م حـ ء هي زاوية ميل $\overline{أ حـ}$ على الرأسي

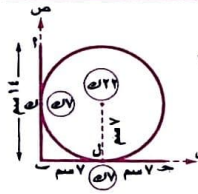
عند التعليق من حـ وليكن قياسها = ى

∴ ظا ى = $\frac{م ء}{ء حـ}$ = $\frac{٣٠ \sqrt{٣}}{٦٠ - أ ء}$ = $\frac{٣٠ \sqrt{٣}}{١٥}$

= $\frac{٣٠ \sqrt{٣}}{٤٥}$

= $\frac{٣ \sqrt{٣}}{٩}$

٥٩



محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧

= ٤٤ سم

∴ طول $\overline{ب حـ}$ = $\overline{أ ب}$

= $\frac{٧٢ - ٤٤}{٢}$

= ١٤ سم

محيط الدائرة : $\overline{أ ب}$: $\overline{ب حـ}$ = ٤٤ : ١٤ : ١٤

= ٢٢ : ٧ : ٧

نفرض كتلة الدائرة = ٢٢ ك

، كتلة كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ = ٧ ك

باختيار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$

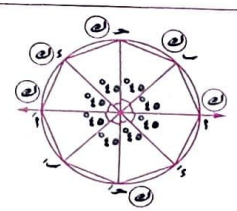
الكتلة	٢٢ ك	٧ ك	٧ ك
س	٧	٧	٠
ص	٧	٠	٧

س$_م$ = $\frac{٢٢ ك \times ٧ + ٧ ك \times ٧}{٢٢ ك + ٧ ك + ٧ ك}$ = $\frac{٢٠٣}{٣٦}$

، ص$_م$ = $\frac{٢٢ ك \times ٧ + ٧ ك \times ٧}{٢٢ ك + ٧ ك + ٧ ك}$ = $\frac{٢٠٣}{٣٦}$

أى أه: مركز الثقل يبعد $\frac{٢٠٣}{٣٦}$ سم عن كل من $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب أ}$

٦٠



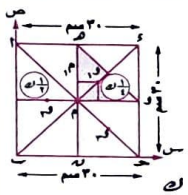
الكتلة	ك	نق	حـ	ب	أ	ء	أ	حـ
س	نق	نق ما ٤٥°	.	ك	ك	ك	ك	ك
ص	.	نق ما ٤٥°	نق	نق ما ٤٥°	.	− نق	− نق	نق

س$_م$ = $\frac{\text{نق} \left(ك + \frac{١}{٢} ك - \frac{١}{٢} ك - ك \right)}{٦ ك}$ = صفر

، ص$_م$ = $\frac{\text{نق} \left(ك \times \frac{١}{٢} + ك + \frac{١}{٢} ك - ك \right)}{٦ ك}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ نق

بُعد مركز الثقل عن م = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ نق

٦١



باختيار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$

نفرض أن :

كتلة Δ و هـ م = $\frac{١}{٤}$ ك

، كتلة □ هـ ب ء أ = $\frac{١}{٢}$ ك

، كتلة □ و حـ ء م = $\frac{١}{٤}$ ك

تؤثر عند $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ على الترتيب

الكتلة	$\frac{١}{٤}$ ك	$\frac{١}{٢}$ ك	$\frac{١}{٤}$ ك
س	٢٢,٥	٧,٥	٢٠
ص	٧,٥	١٥	٢٠

س$_م$ = $\frac{\frac{١}{٤} ك \times ٢٢,٥ + \frac{١}{٢} ك \times ٧,٥ + \frac{١}{٤} ك \times ٢٠}{ك}$ = ١٤,٣٧٥

، ص$_م$ = $\frac{\frac{١}{٤} ك \times ٧,٥ + \frac{١}{٢} ك \times ١٥ + \frac{١}{٤} ك \times ٢٠}{ك}$ = ١٤,٣٧٥

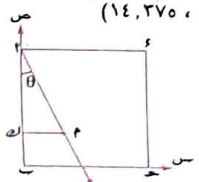
∴ مركز الثقل = (١٤,٣٧٥ ، ١٤,٣٧٥)

∴ ظا θ = $\frac{م ك}{ل ك}$

= $\frac{١٤,٣٧٥}{١٤,٣٧٥ - ٣٠}$

= $\frac{٢٣}{٢٥}$

بُعد وضع الكتلة $\frac{١}{٢}$ ك



الكتلة	ك	$\frac{١}{٢}$ ك
س	١٤,٣٧٥	س
ص	١٤,٣٧٥	ص

س$_م$ = $\frac{ك \times ١٤,٣٧٥ + \frac{١}{٢} ك \times س}{\frac{٣}{٢} ك}$ = ١٥

∴ ١٤,٣٧٥ + $\frac{١}{٢}$ س = ٢٢,٥ ∴ س = $\frac{٦٥}{٤}$

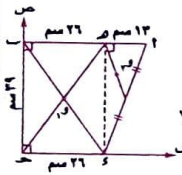
، ص$_م$ = $\frac{ك \times ١٤,٣٧٥ + \frac{١}{٢} ك \times ص}{\frac{٣}{٢} ك}$ = ١٥

∴ ١٤,٣٧٥ + $\frac{١}{٢}$ ص = ٢٢,٥ ص = $\frac{٦٥}{٤}$

∴ الوزن يوضع على بُعد $\frac{٦٥}{٤}$ سم

، $\frac{٦٥}{٤}$ سم من $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب أ}$

٦٢



مساحة المستطيل ه ب حـ ء :

مساحة Δ أ ه ء

= ٢٦ × ٣٩ : $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ٣٩

= ٤ : ١

∴ كتلة المستطيل = ٤٨ جم وتؤثر عند $ق_1$

، كتلة المثلث = ١٢ جم وتؤثر عند $ق_3$

$ق_2$ = $\left(\frac{٢٦ + ٣٦ + ٣٩}{٣} ، \frac{٠ + ٣٩ + ٣٩}{٣} \right)$ = $\left(٣٦ ، \frac{٩١}{٣} \right)$

ك	٤٨	١٢
س	١٣	$\frac{٩١}{٣}$
ص	١٩,٥	٢٦

س$_م$ = $\frac{٤٨ \times ١٣ + ١٢ \times \frac{٩١}{٣}}{١٢ + ٤٨}$ = $\frac{٢٤٧}{١٥}$

، ص$_م$ = $\frac{٤٨ \times ١٣ + ١٩,٥ \times ١٢ + ٢٦ \times ١٢}{١٢ + ٤٨}$ = ٢٠,٨

∴ مركز الثقل (م) = $\left(\frac{٢٤٧}{١٥} ، ٢٠,٨ \right)$

أى أه: على بُعد $\frac{٢٤٧}{١٥}$ سم عن $\overline{ب حـ}$

، ٢٠,٨ سم عن $\overline{حـ ء}$

الكتلة	ب	ء
س	٢٠	٦٠
ص	٨	٣
	٤	٤

$$\text{س}_م = \frac{8\times30+3\times60}{30+60+25} = \frac{84}{23}$$

$$\text{ص}_م = \frac{\frac{8}{3}\times30+4\times60+4\times25}{30+60+25} = \frac{84}{23}$$

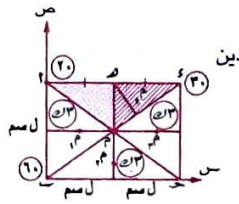
أى أن:

مركز الثقل يبعد $\frac{84}{23}$ سم عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$

$\therefore$ ظا $\theta = 1$

$\therefore$ $\overline{أب}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها $45°$

٦٥



باختيار اتجاهين متعامدين

$\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{بأ}$

باعتبار كتلة كل من

Δ أ م ب ، م بحـ

، م حـ ء ، م ء د = ٣ ك

وتؤثر عند $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، $م_4$ على الترتيب

ومن هندسة الشكل :

$م_1م = \frac{2}{3}ل$ ، $م_2م = \frac{1}{3}ل$

$م_4 = \left(\frac{ل+ل+2ل}{3} ، \frac{\frac{1}{2}ل+ل}{3}\right)$

$= \left(\frac{4}{3}ل ، \frac{5}{6}ل\right)$

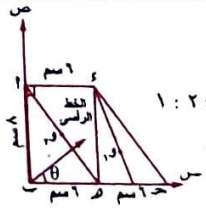
	ء	أ	ب	$م_1$	$م_2$	$م_3$	$م_4$
	٣٠	٢٠	٦٠	٣ ك	٣ ك	٣ ك	٣ ك
س	٢ ل	٠	٠	$\frac{1}{2}$ ل	ل	$\frac{5}{3}$ ل	$\frac{4}{3}$ ل
ص	ل	ل	٠	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{1}{6}$ ل	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{5}{6}$ ل

٦٤

مساحة المثلث : مساحة المستطيل = ٤٨ : ٢٤ = ٢ : ١

$\therefore$ كتلة المستطيل = ٦٠ جم

، كتلة المثلث = ٣٠ جم



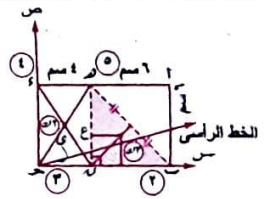
	المستطيل	Δ	ء	د	ب	حـ
الكتلة	٢	٣	٤	٥	٢	٣
س	٢	٦	٠	٤	١٠	٠
ص	٣	٢	٦	٦	٠	٠

$\text{س}_م = \frac{2\times10+4\times5+6\times3+2\times2}{19} = \frac{62}{19}$

$\text{ص}_م = \frac{6\times5+4\times6+2\times3+2\times2}{19} = \frac{66}{19}$

$\therefore$ طا ى $= \frac{66}{62} = \frac{33}{31}$ $\therefore$ ٣١ طا ى = ٣٣

٦٣



مساحة المربع أ ب د ء :

مساحة المستطيل د ب حـ ء = ٣٦ : ٢٤ = ٣ : ٢

$\therefore$ نفرض أن كتلة المستطيل = ٢ ك

، كتلة المربع = ٣ ك $\therefore$ كتلة Δ ب د ب = ٣ ك

$\therefore$ كتلة المستطيل = ٢ ثقل كجم

، كتلة Δ ب د ب = ٣ ث.كجم

	المستطيل	Δ	ء	د	ب	حـ
الكتلة	٣	٢	٥	٤	٢	٣
س	٠	١٠	٤	٠	٦	٢
ص	٠	٠	٦	٦	٢	٣

$\text{س}_م = \frac{2\times10+4\times5+6\times3+2\times2}{19} = \frac{62}{19}$

$\text{ص}_م = \frac{6\times5+4\times6+2\times3+2\times2}{19} = \frac{66}{19}$

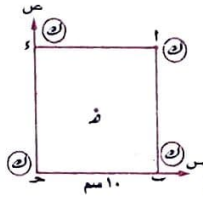
$\therefore$ طا ى $= \frac{66}{62} = \frac{33}{31}$ $\therefore$ ٣١ طا ى = ٣٣

	ء	حـ	ب	أ	د
الكتلة	ل	ل	ل	ل	ل
س	٠	٠	١٠	١٠	ك
ص	١٠	٠	٠	١٠	ك

$\therefore$ $\text{س}_م = \frac{ك\times10+ل\times10}{4ل} = 5$

، $\text{ص}_م = \frac{ل\times10+ك\times10}{4ل} = 5$

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة م = (٥ ، ٥) أى عند مركز المربع (د)



١

أولاً : تعيين مركز ثقل المجموعة :

نفرض أن كتلة كل من الكتل الموضوعة عند رؤوس المربع هى ك نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

	أ	ب	حـ	ء
الكتلة	ل	ل	ل	ل
س	١٠	١٠	٠	٠
ص	١٠	٠	٠	١٠

$\therefore$ $\text{س}_م = \frac{ك\times10+ل\times10}{4ل} = 5$

، $\text{ص}_م = \frac{ل\times10+ك\times10}{4ل} = 5$

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة م = (٥ ، ٥) أى عند مركز المربع (د)

إجابات تمارين 11

$= \frac{600ل+1320ل}{1100+1200ل}$

، $\text{ص}_م = \frac{320ل+200ل+\frac{3}{2}ل+\frac{1}{2}ل+\frac{5}{2}ل}{1100+1200ل}$

$= \frac{500ل+600ل}{1100+1200ل}$

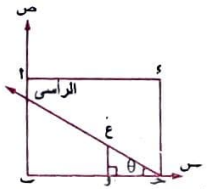
• **عند التعليق من (حـ) :**

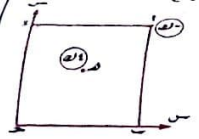
ظا $\theta = \frac{ع\,و}{و\,حـ} = \frac{11}{27}$

$\therefore$ $\left(\frac{500ل+600ل}{1100+1200ل}\right)$

$\div \left(2ل - \frac{600ل+1320ل}{1100+1200ل}\right) = \frac{11}{27}$

$\therefore$ $\frac{11}{27} = \frac{500+600ك}{1100+1200ك}$ $\therefore$ ك = ١٠ جم





	د	ء
الكتلة	٤ ك	- ك
س	٥	١٠
ص	٥	١٠

$\therefore$ $\text{س}_م = \frac{4ك\times5-ك\times10}{4ك-ك} = 3\frac{1}{3}$

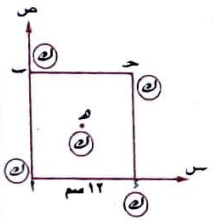
، $\text{ص}_م = \frac{4ك\times5-ك\times10}{4ك-ك} = 3\frac{1}{3}$

$\therefore$ م $= \left(3\frac{1}{3} ، 3\frac{1}{3}\right)$

٢

باختيار اتجاهين متعامدين

$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أء}$



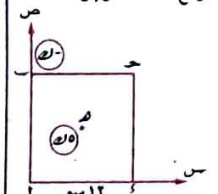
	أ	ب	حـ	ء	د
الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	٠	١٢	١٢	٦
ص	٠	١٢	١٢	٠	٦

$\therefore$ $\text{س}_م = \frac{ك\times12+ك\times12+ك\times6}{5ك} = 6$

، $\text{ص}_م = \frac{ك\times12+ك\times12+ك\times6}{5ك} = 6$

$\therefore$ مركز الثقل = (٦ ، ٦)

• نعين مركز ثقل المجموعة بعد رفع الكتلة الموجودة عند ب



	د	ب
الكتلة	٥ ك	- ك
س	٦	٠
ص	٦	١٢

$\therefore$ $\text{س}_م = \frac{5ك\times6-ك\times0}{5ك-ك} = 7,5$

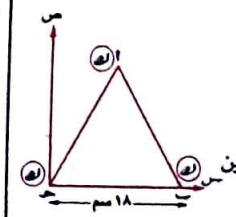
$$\text{، ص}_م = \frac{٥\,ك \times ٦ - ك \times ١٢}{٥\,ك - ك} = ٤,٥$$

$$\therefore \text{مَ} = (٤,٥ ، ٧,٥)$$

٣

أولًا : تعيين مركز ثقل المجموعة :

نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$



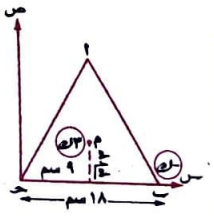
الكتلة	أ	ب	حـ
س	ك	ك	ك
ص	٩	١٨	٠
	$٣\sqrt{٣}$ ٩	٠	٠

$$\therefore \text{س}_م = \frac{ك \times ٩ + ك \times ١٨}{٣\,ك} = ٩$$

$$\text{، ص}_م = \frac{ك \times ٣\sqrt{٣}\,٩}{٣\,ك} = ٣\sqrt{٣}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = (٩ ، ٣\sqrt{٣}) \text{ وهو مركز ثقل } \Delta \text{ أ ب حـ}$$

ثانيًا : تعيين مركز الثقل بعد رفع الكتلة التى عند ب :



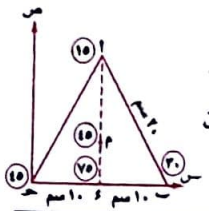
الكتلة	م	ب
س	٣ ك	- ك
ص	٩	١٨
	$٣\sqrt{٣}$ ٣	٠

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٣\,ك \times ٩ - ك \times ١٨}{٣\,ك - ك} = ٤\frac{١}{٢}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{٣\,ك \times ٣\sqrt{٣}\,٣ - ك \times ٠}{٣\,ك - ك} = \frac{٣\sqrt{٣}\,٩}{٢}$$

$$\therefore \text{مَ} = (\frac{٩}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٣}\,٩}{٢})$$

٤



أولًا : مركز ثقل المجموعة :

نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

الكتلة	٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	$٣\sqrt{٣}$ ١٠	$\frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٣}$

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٧٥ \times ١٠ + ٣٠ \times ٢٠ + ١٥ \times ١٠ + ٤٥ \times ١٠}{٤٥ + ٧٥ + ٣٠ + ١٥ + ٤٥} = \frac{٦٥}{٧}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{\frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٣} \times ٤٥ + ١٥ \times ٣\sqrt{٣}\,١٠}{٤٥ + ٧٥ + ٣٠ + ١٥ + ٤٥} = \frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٧}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل} = (\frac{٦٥}{٧} ، \frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٧}) \text{ من نقطة حـ}$$

ثانيًا : بعد رفع الكتلة عند ب :

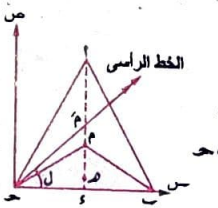
الكتلة	٢١٠	-٣٠
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٧}$	٠

$$\text{س}_{م_١} = \frac{٢١٠ \times \frac{٦٥}{٧} - ٣٠ \times ٢٠}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{١٥}{٢}$$

$$\text{، ص}_{م_١} = \frac{٢١٠ \times \frac{٣\sqrt{٣}\,١٠}{٧}}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{٣\sqrt{٣}\,٥}{٣}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل الجديد} = (\frac{١٥}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٣}\,٥}{٣}) \text{ من نقطة حـ}$$

٥



كتلة المثلث المقطوع $= \frac{١}{٣}$ كتلة المثلث الأصلى.

$\therefore$ نفرض أن كتلة Δ أ ب حـ $= ٣\,ك$ عند م

$$= (٩ ، ٣\sqrt{٣})$$

$\therefore$ كتلة Δ م ب حـ $= -ك$ عند د $= (٩ ، ٣\sqrt{٣})$

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٢\,ك \times ٩ - ك \times ٩}{٢\,ك - ك} = ٩$$

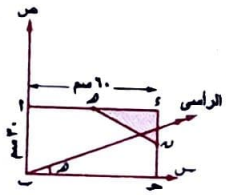
$$\text{، ص}_م = \frac{٢\,ك \times ٣\sqrt{٣}\,٢ - ك \times ٣\sqrt{٣}\,٤}{٢\,ك - ك} = ٣\sqrt{٣}\,٤$$

$\therefore$ مركز الثقل الجديد مَ $= (٩ ، ٣\sqrt{٣}\,٤)$

$\therefore$ نرسم حـ مَ فيكون هو الخط الرأسى

$\therefore$ فى Δ مَ ء حـ يكون : طا ل $= \frac{\text{مَ ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٣\sqrt{٣}\,٤}{٩}$

٦



باخذ اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

مساحة Δ ء د هـ

: مساحة المستطيل أ ب حـ ء

$$= \frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ١٥ : ٦٠ \times ٣٠ = ١ : ٨$$

، ويفرض ان كتلة Δ ء د هـ $= ك$

، بفرض أن كتلة المستطيل أ ب حـ ء $= ٨\,ك$

مركز ثقل Δ ء د هـ

$$= (\frac{٦٠ + ٦٠ + ٣٠}{٣} ، \frac{٣٠ + ٣٠ + ١٥}{٣}) = (٥٠ ، ٢٥)$$

الكتلة	٨ ك	- ك
س	٣٠	٥٠
ص	١٥	٢٥

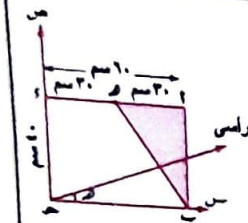
$$\therefore \text{س}_م = \frac{٨\,ك \times ٣٠ + -ك \times ٥٠}{٨\,ك - ك} = \frac{١٩٠}{٧}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{٨\,ك \times ١٥ - ك \times ٢٥}{٨\,ك - ك} = \frac{٩٥}{٧}$$

$\therefore$ مركز الثقل الجزء المتبقى $= (\frac{١٩٠}{٧} ، \frac{٩٥}{٧})$

$$\text{، طا هـ} = \frac{٩٥}{٧} \div \frac{١٩٠}{٧} = \frac{١}{٢}$$

٧



باخذ اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$

مساحة Δ أ ب د

: مساحة المستطيل أ ب حـ ء

$$= \frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ٤٠ : ٦٠ \times ٤٠ = ١ : ٤$$

، بفرض أن كتلة Δ أ ب د $= ك$

، بفرض أن كتلة المستطيل أ ب حـ ء $= ٤\,ك$

، مركز ثقل Δ أ ب د

$$= (\frac{٦٠ + ٦٠ + ٣٠}{٣} ، \frac{٤٠ + ٤٠ + ٠}{٣}) = (٥٠ ، \frac{٨٠}{٣})$$

الكتلة	٤ ك	- ك
س	٣٠	٥٠
ص	٢٠	$\frac{٨٠}{٣}$

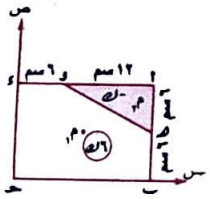
$$\therefore \text{س}_م = \frac{٤\,ك \times ٣٠ - ك \times ٥٠}{٤\,ك - ك} = \frac{٧٠}{٣}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{٤\,ك \times ٢٠ - ك \times \frac{٨٠}{٣}}{٤\,ك - ك} = \frac{١٦٠}{٩}$$

$\therefore$ مركز ثقل الجزء المتبقى $= (\frac{٧٠}{٣} ، \frac{١٦٠}{٩})$

$$\text{، طا هـ} = \frac{١٦٠}{٩} \div \frac{٧٠}{٣} = \frac{١٦}{٢١}$$

٨



$$\frac{\text{مساحة سطح المثلث أ د و}}{\text{مساحة سطح المثلث أ ب حـ ء}} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٦ \times ١٢}{١٨ \times ١٢} = \frac{١}{٦}$$

$\therefore$ نفرض أن كتلة الصفيحة المستطيلة $= ٦\,ك$

وتؤثر عند م١ حيث م١ $= (٩ ، ٦)$

، كتلة Δ أ د و المقطوع $= -ك$ عند م١ حيث :

$= \left(\frac{١٨+١٨+٦}{٣}, \frac{١٢+٦+١٢}{٣}\right) = (١٤, ١٠)$

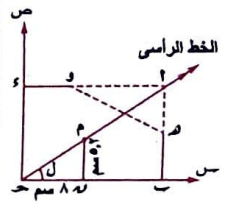
$\therefore$ س$_م$ $= \frac{٦\,ك \times ٩ - ك \times ١٤}{٦\,ك - ك} = ٨$

، ص$_م$ $= \frac{٦\,ك \times ٦ - ك \times ١٠}{٦\,ك - ك} = ٥,٢$

$\therefore$ م $= (٨, ٥,٢)$

• **التعليق من حـ :**

من هندسة الشكل :



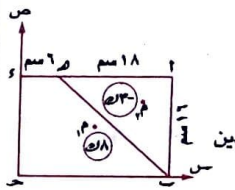
فى Δ م ب حـ :

طا ل $= \frac{\text{م ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{٥,٢}{٨}$

$\therefore$ ق (د ل) $= ٣٣^\circ$ أ

٩

أولًا : إيجاد مركز ثقل الجزء الباقى :



نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ص}}$

، $\because$ $\frac{\text{مساحة سطح } \Delta\, ١\,ب\,د}{\text{مساحة سطح المستطيل } ١\,ب\,حـ\,ء} = \frac{\frac{١}{٢} \times ١٨ \times ١٦}{٢٤ \times ١٦} = \frac{٣}{٨}$ $\therefore$

$\therefore$ $\frac{\text{كتلة } \Delta\, ١\,ب\,د}{\text{كتلة المستطيل } ١\,ب\,حـ\,ء} = \frac{٣}{٨}$

$\therefore$ نفرض أن كتلة المستطيل ٨ ك عند م$_١$ حيث :

م$_١$ $= (١٢, ٨)$

، كتلة Δ ب د م $= -٣$ ك عند م$_٢$ حيث م$_٢$ تبُعد عن $\overline{\text{حـ ء}}$ بمقدار $= \frac{٢٤ + ٢٤ + ٦}{٣} = ١٨$ سم

، م$_٢$ تبُعد عن $\overline{\text{ب حـ}}$ بمقدار $= \frac{١٦ + ٠ + ١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ سم

$\therefore$ م$_٢$ $= \left(١٨, \frac{٣٢}{٣}\right)$

الكتلة	٨ ك	١٢	$\frac{٣٢}{٣}$
	- ٣ ك	١٨	٨

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{٨\,ك \times ١٢ - ٣\,ك \times ١٨}{٨\,ك - ٣\,ك} = ٨,٤$

أى أن : بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن $\overline{\text{حـ ء}}$ $= ٨,٤$ سم

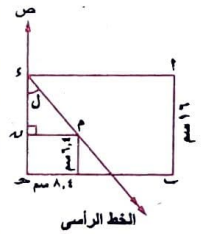
، ص$_م$ $= \frac{٨\,ك \times ٨ - ٣\,ك \times \frac{٣٢}{٣}}{٨\,ك - ٣\,ك} = ٦,٤$

أى أن : بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عند $\overline{\text{حـ ب}}$ $= ٦,٤$ سم

$\therefore$ م $= (٨,٤ ، ٦,٤)$

ثانيًا : عند التعليق من ء :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{ء م}}$ فيكون هو الخط الرأسى ونرسم $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{ء حـ}}$



$\therefore$ فى Δ ء م د

يكون طا ل $= \frac{\text{م د}}{\text{ء د}}$

ولكن م د $= ٨,٤$ سم

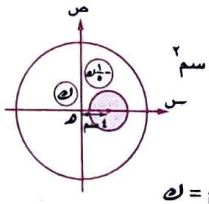
، ء د $=$ ء حـ $-$ د حـ

$\therefore$ ء د $= ١٦ - ٦,٤ = ٩,٦$ سم

$\therefore$ طا ل $= \frac{٨,٤}{٩,٦}$ $\therefore$ طا ل $= \frac{٧}{٨}$

$\therefore$ ق (د ل) $= ١١^\circ ٤١$

١٠



$\because$ مساحة سطح اللوح ٥٠٠ سم^٢

، مساحة سطح الثقب الدائرى ١٠٠ سم^٢

$\therefore$ لو فرضنا أن كتلة اللوح $=$ ك

عند مركزه (م) فإن كتلة الثقب المقطوع $= -\frac{١}{٥}$ ك

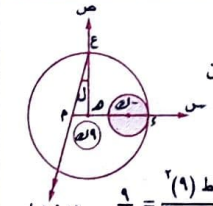
ويفرض أن م (مركز اللوح) هى نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{\text{م س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ص}}$ اتجاهين متعامدين

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{-٢٥\,ك \times ٠ + ٢٠\,ك \times ٠}{-٢٥\,ك + ٢٠\,ك} = ٠$

$\therefore$ مركز الثقل $= (٢٧,٥ ، ٠)$

$\therefore$ مركز ثقل الجزء المتبقى على بُعد ٢,٥ سم من مركز ثقل القرص الأصلى وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

١٢



نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{\text{م س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ص}}$

حيث م مركز القرص

$\because$ $\frac{\text{كتلة القرص الأصلى}}{\text{كتلة القرص المقطوع}} = \frac{\text{ط } (٩)^٢}{\text{ط } (١)^٢} = \frac{٩}{١}$ $\therefore$

$\therefore$ كتلة القرص الأصلى $= ٩$ ك

عند م حيث م $= (٠ ، ٠)$

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{-٢٥\,ك \times \frac{٥}{٣}ل + ٢٠\,ك \times ل + ٤\,ك \times ل}{-٢٥\,ك + ٢٠\,ك + ٤\,ك} = \frac{٧}{٦}ل$

، ص$_م$ $= \frac{-٢٥\,ك \times \frac{٥}{٣}ل + ٢٠\,ك \times ل + ٤\,ك \times ل}{٤\,ك} = \frac{٥}{٦}ل$

$\therefore$ مركز ثقل $= \left(\frac{٧}{٦}ل ، \frac{٥}{٦}ل\right)$

، كتلة القرص المقطوع $=$ $-$ ك عند ر

حيث ر $= (٢ ، ٠)$

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{٩\,ك \times ٠ - ك \times ٢}{٩\,ك - ك} = \frac{١}{٤}$

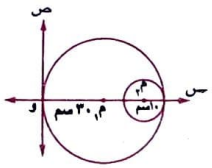
$\therefore$ مركز ثقل الجزء الباقى عند «م» حيث : م ء $= ٢\frac{١}{٤}$ سم

ثم نرسم $\overleftrightarrow{\text{ع م}}$ فيكون هو الخط الرأسى

$\therefore$ فى Δ ع د م يكون طا ل $= \frac{\text{د م}}{\text{ع د}}$

، د م $= \frac{١}{٤}$ ، ع د $= ٣$ سم $\therefore$ طا ل $= \frac{\frac{١}{٤}}{٣} = \frac{١}{١٢}$

١١



مساحة الدائرة م$_١$

: مساحة الدائرة م$_٢$

$= \pi\,(٣٠)^٢ : \pi\,(١٠)^٢$

$= ٩ : ١$

بفرض أن كتلة الدائرة م$_١$ $= ٩$ ك

بفرض أن كتلة الدائرة م$_٢$ $= ك$

، باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{م س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$

الكتلة	٩ ك	٣٠	٠
	- ك	٥٠	٠

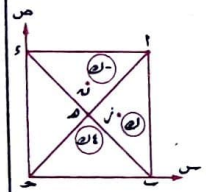
$\therefore$ س$_م$ $= \frac{٩\,ك \times ٣٠ - ك \times ٥٠}{٩\,ك - ك} = ٢٧,٥$

، ص$_م$ $= \frac{٩\,ك \times ٠ - ك \times ٠}{٩\,ك - ك} = ٠$

$\therefore$ مركز الثقل $= (٢٧,٥ ، ٠)$

$\therefore$ مركز ثقل الجزء المتبقى يبُعد عن م بمقدار ١ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{م س}}$

١٣



أولًا : تعيين مركز ثقل المجموعة :

ناخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ص}}$

ونفرض كتلة المربع $= ٤$ ك

$\therefore$ كتلة المثلث ١ د ء $= \frac{٤\,ك}{٤} = ك$

بفرض أن طول ضلع المربع $= ٢$ ل وحدة طول

$\therefore$ مركز ثقل المثلث ١ د ء

$= \left(\frac{٢ل + ل + ٠}{٣} ، \frac{٢ل + ٢ل + ل}{٣}\right) = \left(ل ، \frac{٥}{٣}ل\right)$

مركز ثقل المثلث ١ ب د

$= \left(\frac{٢ل + ٢ل + ل}{٣} ، \frac{٢ل + ٠ + ل}{٣}\right) = \left(\frac{٥}{٣}ل ، ل\right)$

الكتلة	- ك	ل	٤ ك
س	ل	$\frac{٥}{٣}$ل	ل
ص	$\frac{٥}{٣}$ل	ل	ل

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{-ك \times ل + ك \times \frac{٥}{٣}ل + ٤\,ك \times ل}{-ك + ك + ٤\,ك} = \frac{٧}{٦}ل$

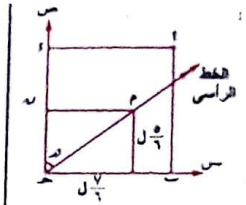
، ص$_م$ $= \frac{-ك \times \frac{٥}{٣}ل + ك \times ل + ٤\,ك \times ل}{٤\,ك} = \frac{٥}{٦}ل$

$\therefore$ مركز ثقل $= \left(\frac{٧}{٦}ل ، \frac{٥}{٦}ل\right)$

ثانيًا : عند التعليق من حـ :

نرسم $\overline{حـ م}$ فيكون هو الخط الرأسي

ثم نرسم $\overline{م ه} \perp \overline{ء حـ}$



∴ في Δ م ه حـ يكون :

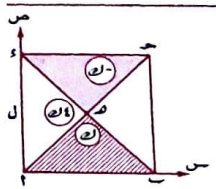
ظا هـ = $\frac{م ه}{ه حـ}$

∴ ظا هـ = $\frac{ل\frac{7}{6}}{ل\frac{5}{6}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{7}{5}$

∴ ق (د هـ) = ٥٤° ٢٨′

١٤

باخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ا ب}$ ، $\overleftarrow{ا ء}$

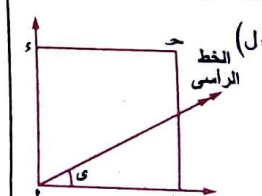


الكتلة	٤ ك	ك	– ك
س	ل ١/٢	ل ١/٢	ل ١/٢
ص	ل ١/٢	ل ١/٦	ل ٥/٦

$س_م = \frac{٤ ك \times ل\frac{1}{2} + ك \times ل\frac{1}{2} - ك \times ل\frac{1}{2}}{٤ ك + ك - ك} = ل\frac{1}{2}$

$ص_م = \frac{٤ ك \times ل\frac{1}{2} + ك \times ل\frac{1}{6} - ك \times ل\frac{5}{6}}{٤ ك + ك - ك} = ل\frac{1}{3}$

∴ مركز ثقل Δ = $(ل\frac{1}{2}، ل\frac{1}{3})$

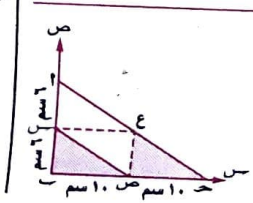


∴ ظا ى = $\frac{ل\frac{1}{3}}{ل\frac{1}{2}}$

∴ ق (د ى) = ٤١′ ٣٣°

١٥

مساحة Δ (حـ ص ع) : مساحة Δ (ا ب حـ) = ١ : ٤



بفرض أن كتلة Δ حـ ص ع = ك ،

كتلة Δ ا ب حـ = ٤ ك

الكتلة	٤ ك	ك	– ك
س	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{40}{3}$
ص	٤	٢	٢

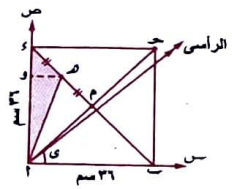
$س_م = \frac{٤ ك \times \frac{20}{3} + ك \times \frac{10}{3} - ك \times \frac{40}{3}}{٤ ك + ك - ك} = \frac{25}{6}$

$ص_م = \frac{٤ ك \times ٤ + ك \times ٢ - ك \times ٢}{٤ ك + ك - ك} = ٤$

ظا هـ = ٤ ÷ $\frac{25}{6}$ = $\frac{24}{25}$

١٦

من هندسة الشكل :



$\frac{ء هـ}{ء ب} = \frac{هـ و}{ا ب} = \frac{1}{4}$

∴ هـ و = ٩ سم

مساحة Δ ا هـ ء :

مساحة المربع ا ب حـ ء

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ × ٩ : ٣٦ × ٣٦ = ١ : ٨

بفرض أن كتلة المربع ا ب حـ ء = ٨ ك

، بفرض أن كتلة Δ ا هـ ء = ك

، مركز ثقل Δ ا هـ ء

= $(\frac{0+0+9}{3}، \frac{0+36+27}{3})$ = (٣ ، ٢١)

الكتلة	٨ ك	– ك
س	١٨	٣
ص	١٨	٢١

$س_م = \frac{٨ ك \times ١٨ - ك \times ٣}{٨ ك - ك} = \frac{141}{7}$

$ص_م = \frac{٨ ك \times ١٨ - ك \times ٢١}{٨ ك - ك} = \frac{123}{7}$

∴ مركز الثقل = $(\frac{141}{7}، \frac{123}{7})$ ، ظا = $\frac{41}{47}$

∴ ميل $\overleftarrow{ا ب}$ على الرأسي = $\frac{41}{47}$

١٧

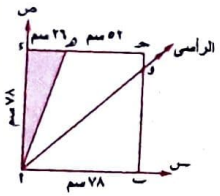
مساحة Δ ا هـ ء :

مساحة المربع ا ب حـ ء

= $\frac{1}{2}$ × ٢٦ × ٧٨

: ٧٨ × ٧٨

= ١ : ٦



بفرض أن كتلة المربع = ٦ ك ، كتلة Δ ا ء هـ = ك

، مركز ثقل المثلث

= $(\frac{0+26+0}{3}، \frac{0+78+78}{3})$ = (٥٢ ، $\frac{26}{3}$)

الكتلة	٦ ك	– ك
س	٣٩	$\frac{26}{3}$
ص	٣٩	٥٢

$س_م = \frac{٦ ك \times ٣٩ - ك \times \frac{26}{3}}{٦ ك - ك} = \frac{676}{15}$

$ص_م = \frac{٦ ك \times ٣٩ - ك \times ٥٢}{٦ ك - ك} = \frac{182}{5}$

∴ مركز الثقل = $(\frac{676}{15}، \frac{182}{5})$

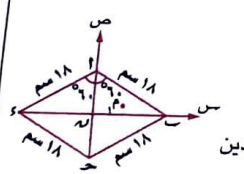
∴ ظا هـ = $\frac{ب و}{ا و}$ = $\frac{21}{78}$ ∴ و ب = ٦٣ سم

∴ ١٥ = حـ و

١٨

أولًا : تعيين مركز ثقل الجزء الباقي :

نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ه س}$ ، $\overleftarrow{ه ص}$



ونفرض أن كتلة الصفيحة = ٤ ك ويؤثر عند ه حيث :

ه = (٠ ، ٠)

، كتلة المثلث ا ب ه = – ك يؤثر عند $م_١$ حيث $م_١$ تبعد عن $\overline{ه ا}$ بمقدار $\frac{0+ب ه+0}{3}$

ولكن ه ا = ٩ سم ، ه ب = ٩ $\sqrt{3}$ سم

∴ بُعد $م_١$ عن $\overline{ه ا}$ = $\frac{9\sqrt{3}}{3}$ = ٣ $\sqrt{3}$ سم

، بُعد $م_١$ عن $\overline{ه ب}$ = $\frac{9+0+0}{3}$ = ٣ سم

∴ $م_١$ = (٣ $\sqrt{3}$ ، ٣)

∴ $س_م$ = $\frac{٤ ك \times ٠ - ك \times ٣\sqrt{3}}{٤ ك - ك}$ = – ٣ $\sqrt{3}$

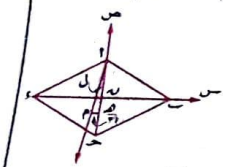
، $ص_م$ = $\frac{٤ ك \times ٠ - ك \times ٣}{٤ ك - ك}$ = – ١

∴ مركز الثقل للجزء المتبقى هو م = (– ٣ $\sqrt{3}$ ، – ١)

∴ ه م = $\sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ = ٢ سم

ثانيًا : عند التعليق من ا :

نرسم $\overleftarrow{ا م}$ فيكون هو الخط الرأسي ثم نرسم $\overline{م هـ} \perp \overline{ا ه}$



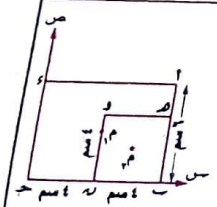
∴ في Δ م هـ ا يكون :

ظا ل = $\frac{م هـ}{ا هـ}$ وليكن م هـ = ٣ $\sqrt{3}$

، ا هـ = ٩ + ١ = ١٠ ∴ ظا ل = $\frac{3\sqrt{3}}{10}$

∴ ١٠ ظا ل = ٣ $\sqrt{3}$

١٩



أولًا : تعيين مركز ثقل الجزء الباقي :

نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

، ∵ $\frac{\text{كتلة المربع ب ه و هـ}}{\text{كتلة المستطيل ا ب حـ ء}} = \frac{\text{مساحة سطح المربع}}{\text{مساحة سطح المستطيل}}$

∴ $\frac{\text{كتلة المربع}}{\text{كتلة المستطيل}} = \frac{٤ \times ٤}{٦ \times ٨} = \frac{1}{3}$

∴ نفرض أن كتلة المستطيل ا ب حـ ء = ٣ ك

وتؤثر عند $م_١$ = (٤ ، ٣)

، نفرض أن كتلة المربع = – ك وتؤثر عند $م_٢$ حيث :

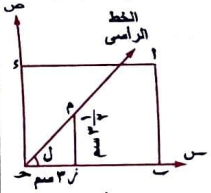
$م_٢$ = (٦ ، ٢)

$\therefore$ مركز ثقل الجزء المتبقى هو م = $(٣\frac{١}{٢} ، ٣)$

ثانيًا : عند التعليق من حـ :

نرسم $\overleftrightarrow{حـ م}$ فيكون هو الخط الرأسى

ثم نرسم $\overline{م ن} \perp \overline{ب حـ}$



$\therefore$ فى Δ م ن حـ يكون ظا ل = $\frac{م ن}{ن حـ} = \frac{٣\frac{١}{٢}}{٣} = \frac{٧}{٦}$

٢٠

مساحة المستطيل ب ل حـ د : مساحة المستطيل ا ب حـ ء

= ٦ × ٤ : ١٢ × ٨

= ١ : ٤

$\therefore$ نفرض أن كتلة المستطيل ب ل حـ د = ك

، نفرض أن كتلة المستطيل ا ب حـ ء = ٤ ك

وبفرض الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا ء}$

الكتلة	– ك	٤ ك
س	٩	٦
ص	٦	٤

$\therefore$ س$_م$ = $\frac{-٩ ك + ٤ ك \times ٦}{- ك + ٤ ك} = ٥$

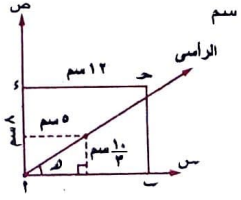
، ص$_م$ = $\frac{-٦ ك + ٤ ك \times ٤}{- ك + ٤ ك} = \frac{١٠}{٣}$

$\therefore$ مركز ثقل الجزء المتبقى $(٥ ، \frac{١٠}{٣})$

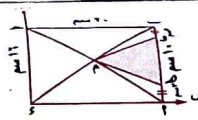
أى أن : مركز الثقل يبعد عن $\overleftrightarrow{ا ء}$ مسافة ٥ سم

، عن $\overleftrightarrow{ا ب}$ مسافة $\frac{١٠}{٣}$ سم

، ظا هـ = $\frac{\frac{١٠}{٣}}{٥} = \frac{٢}{٣}$



باختار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{ا ء}$ ، $\overleftrightarrow{ء حـ}$



مساحة Δ ء م

: مساحة المستطيل ا ب حـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ : ٢٠ × ١٦ = ٥ : ٣٢

بفرض أن كتلة Δ (م ء د) = ٥ ك

، بفرض أن كتلة المربع ا ب حـ ء = ٣٢ ك

، مركز ثقل المثلث (م ء د)

= $(\frac{٢٠ + ٢٠ + ١٠}{٣} ، \frac{٨ + ١٣ + ٣}{٣}) = (٨ ، \frac{٥٠}{٣})$

الكتلة	–٥ ك	٣٢ ك
س	$\frac{٥٠}{٣}$	١٠
ص	٨	٨

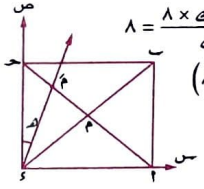
س$_م$ = $\frac{-٥ ك \times \frac{٥٠}{٣} + ٣٢ ك \times ١٠}{٣٢ ك - ٥ ك} = \frac{٧١٠}{٨١}$

، ص$_م$ = $\frac{-٥ ك \times ٨ + ٣٢ ك \times ٨}{٣٢ ك - ٥ ك} = ٨$

$\therefore$ مركز الثقل = $(\frac{٧١٠}{٨١} ، ٨)$

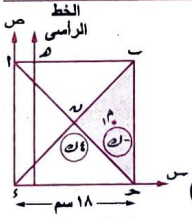
، ظا هـ = $\frac{٧١٠}{٨١} \div ٨$

= $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$



٢٢

نرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{ء س}$ ، $\overleftrightarrow{ء ص}$



$\therefore$ كتلة المربع ا ب حـ ء

= ٤ ك عند ن = (٩ ، ٩)

، كتلة Δ ن ب حـ = – ك عند م$_١$ = (١٥ ، ٩)

$\therefore$ س$_م$ = $\frac{٤ ك \times ٩ - ك \times ١٥}{٤ ك - ك} = ٧$

، $\because$ مركز الثقل الصفيحة م يقع على العمود من د على $\overline{ا ب}$

$\therefore$ ا د = ٧ سم

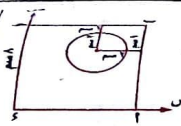
مساحة القرص الدائرى

: مساحة المربع

= π × ٤ × ٨ : π × ١٦ =

بفرض أن كتلة القرص الدائرى = π ك

، بفرض أن كتلة المربع = ١٦ ك



الكتلة	–π ك	١٦ ك
س	٥	٤
ص	٥	٤

س$_م$ = $\frac{-π ك \times ٥ + ١٦ ك \times ٤}{١٦ ك - π ك} = ٣,٧٦$

، ص$_م$ = $\frac{-π ك \times ٥ + ١٦ ك \times ٤}{١٦ ك - π ك} = ٣,٧٦$

$\therefore$ مركز الثقل = (٣,٧٦ ، ٣,٧٦)

أى أن : مركز الثقل يبُعد ٣,٧٦ سم عن كل من $\overline{ء حـ}$ ، $\overline{ء ا}$

٢٤

مساحة الثقب الدائرى

: مساحة المربع

= ١٠٠ : ٤٠ × ٤٠

= ١ : ١٦

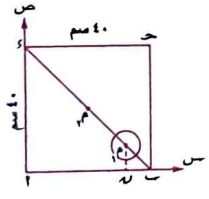
، بفرض أن كتلة الثقب الدائرى = ك

، كتلة المربع = ١٦ ك

، من هندسة الشكل :

$\frac{م_١ ن}{٤٠} = \frac{١}{٥}$ $\therefore$ م$_١$ ن = ٨ سم ، ب ن = ٨ سم

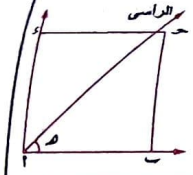
وباختيار $\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا ء}$ اتجاهين متعامدين



الكتلة	– ك	١٦ ك
س	٣٢	٢٠
ص	٨	٢٠

، ص$_م$ = $\frac{-١٠٤ \times ٨ + ١٦ ك \times ٢٠}{١٦ ك - ك} = \frac{١٠٤}{٥}$

$\therefore$ مركز الثقل = $(\frac{٩٦}{٥} ، \frac{١٠٤}{٥})$

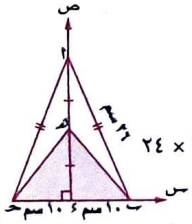


، ظا هـ = $\frac{١٠٤}{٥} \div \frac{٩٦}{٥}$

= $\frac{١٣}{١٢}$

$\therefore$ ق (∠ د) = ٤٧° ١٧ آ

٢٥



مساحة Δ ب د حـ

: مساحة Δ ا ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ١٢ : $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ٢٤

= ١ : ٢

بفرض أن مساحة Δ ب د حـ = ك

، مساحة Δ ا ب حـ = ٢ ك

الكتلة	– ك	٢ ك
س	٠	٠
ص	٤	٨

س$_م$ = $\frac{-ك \times ٠ + ٢ ك \times ٠}{٢ ك - ك} = ٠$

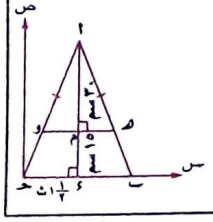
، ص$_م$ = $\frac{-ك \times ٤ + ٢ ك \times ٨}{٢ ك - ك} = ١٢$

$\therefore$ مركز الثقل = (٠ ، ١٢)

أى أن : مركز الثقل يقع عند «د»

$\therefore$ بعد مركز الثقل عند النقطة د = صفر

٢٦



من هندسة الشكل :

$\frac{د و}{ب حـ} = \frac{٢}{٣}$

نفرض أن د و = ٢ ث

∴ ب حـ = ٣ ث

مساحة Δ أ د و : مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٢ ث × ٣٠ : $\frac{1}{2}$ × ٣ ث × ٤٥ = ٤ : ٩

بفرض أن كتلة Δ أ د و = ٤ ك

كتلة Δ أ ب حـ = ٩ ك

وباختيار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ص}}$

الكتلة	٤ ك	٩ ك
س	$1\frac{1}{2}$ ث	
ص	٢٥	١٥

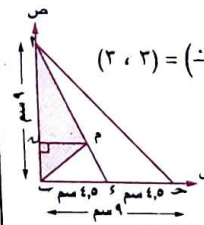
$س_م = \frac{-٤ك \times \frac{3}{2}ث + ٩ك \times \frac{3}{2}ث}{٩ك - ٤ك} = 1\frac{1}{2}$ ث

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى د ب حـ و يقع على $\overline{أ ء}$

$ص_م = \frac{-٤ك \times ٢٥ + ٩ك \times ١٥}{٩ك - ٤ك} = ٧$

∴ مركز الثقل يبُعد عن ء بمقدار ٧ سم

٢٧



م = $\left(\frac{٩+٠+٠}{٣} ، \frac{٩+٠+٠}{٣}\right)$ = (٣ ، ٣)

∴ م ن = ٣ سم

مساحة Δ أ ب م

: مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ٣ : $\frac{1}{2}$ × ٩ × ٩ = ١ : ٣

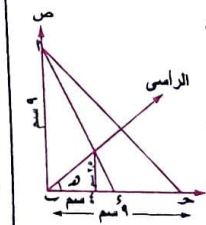
بفرض أن كتلة Δ أ ب م = ك

، كتلة Δ أ ب حـ = ٣ ك

، مركز ثقل Δ أ م ب

= $\left(\frac{٣+٠+٠}{٣} ، \frac{٣+٠+٩}{٣}\right)$

= (١ ، ٤)



الكتلة	ك -	٣ ك
س	١	٣
ص	٤	٣

∴ $س_م = \frac{-ك \times ١ + ٣ك \times ٣}{٣ك - ك} = ٤$

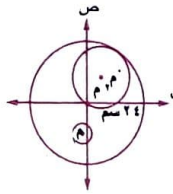
، $ص_م = \frac{-ك \times ٤ + ٣ك \times ٣}{٣ك - ك} = ٢,٥$

، ط ∠ د = $\frac{٢,٥}{٤} = \frac{٥}{٨}$

٢٨ أولًا : (د) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (أ)

٢٩ ① (أ) ② (أ) ③ (ب)
④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (ب)
⑦ (د)

٣٠



مساحة $م_1$: $م_2$: م

= ١٦ π : ١٤٤ π : ٥٧٦ π

= ١ : ٩ : ٣٦

بفرض أن كتلة $م_1$ = ك

، كتلة $م_2$ = ٩ ك ، م = ٣٦ ك

∵ $م_1$ = (-٢ ، -١٢) ، $م_2$ = (٦ ، ١٠)

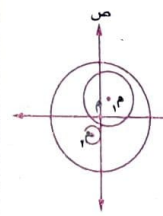
الكتلة	ك -	٩ ك-	٣٦ ك
س	٢-	٦	٠
ص	١٢-	١٠	٠

$س_م = \frac{-ك \times -٢ - ٩ك \times ٦ + ٠}{٣٦ك - ك - ٩ك} = ٢-$

، $ص_م = \frac{-ك \times -١٢ - ٩ك \times ١٠ + ٠}{٣٦ك - ك - ٩ك} = ٣-$

∴ مركز الثقل = (- ٢ ، -٣)

٣١



مساحة $م_1$: $م_2$: م

= π ٩ : π ٣٦ : π

= ٩ : ١ : ٣٦

بفرض أن كتلة $م_1$ = ٩ ك

، $م_2$ = ك ، $م_2$ = ٣٦ ك

∵ $م_1$ = (١ ، ٢) ، $م_2$ = (-١ ، -٣)

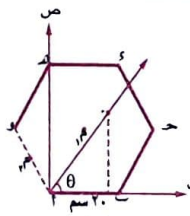
الكتلة	٩- ك	- ك	٣٦ ك
س	١	١-	٠
ص	٢	٣-	٠

$س_م = \frac{-٩ك \times ١ - ك \times -١}{٣٦ك - ٩ك - ك} = -\frac{٤}{١٣}$

، $ص_م = \frac{-٩ك \times ٢ - ك \times -٣}{٣٦ك - ٩ك - ك} = -\frac{١٥}{٢٦}$

∴ مركز الثقل = $\left(-\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٥}{٢٦}\right)$

٣٢



طول كل ضلع من الشكل

= $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠ سم

وبفرض أن كتلة كل ضلع = ك

∴ كتلة الشكل السداسى

= ٦ ك وتؤثر فى $م_1$ = (١٠ ، ١٠ $\sqrt{3}$)

، كتلة الضلع $\overline{أو}$ = ك وتؤثر فى $م_2$ = (-٥ ، ٥ $\sqrt{3}$)

الكتلة	$م_1$	$م_2$
س	٦ ك	- ك
ص	١٠ $\sqrt{3}$	٥ $\sqrt{3}$

$س_م = \frac{٦ك \times ١٠ - ك \times -٥}{٥ك} = ١٣$

، $ص_م = \frac{٦ك \times ١٠ - ك \times ٥\sqrt{3}}{٥ك} = ١١\sqrt{3}$

∴ مركز ثقل السلك = (١٣ ، ١١ $\sqrt{3}$)

، مركز المسدس = (١٠ ، ١٠ $\sqrt{3}$)

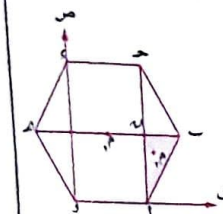
∴ بُعد مركز ثقل السلك عن مركز المسدس

= $\sqrt{(١٣-١٠)^2 + (١١\sqrt{3} - ١٠\sqrt{3})^2}$ = ٢ $\sqrt{3}$ سم

• عند التعليق من أ :

∴ ط θ = $\frac{١١\sqrt{3}}{١٣}$ ∴ θ ≈ ٤٢° ٥٥′

٣٣



ناخذ الاتجاهين المتعامدين

$\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$

مساحة المسدس

: مساحة Δ أ ب م = ١٢ : ١

بفرض أن كتلة المسدس = ١٢ ك

، كتلة Δ أ ب م = ك ، طول ضلع المسدس ل

مركز Δ أ ب م

= $\left(\frac{ل + ل + ١,٥ل}{٣} ، \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ل + \frac{\sqrt{3}}{2}ل + ٠}{٣}\right)$

= $\left(\frac{\sqrt{7}}{6}ل ، \frac{\sqrt{3}}{3}ل\right)$

الكتلة	١٢ ك	- ك
س	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{\sqrt{7}}{6}$ ل
ص	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

∴ $س_م = \frac{١٢ك \times \frac{1}{2}ل - ك \times \frac{\sqrt{7}}{6}ل}{١٢ك - ك} = \frac{٢٩}{٦٦}ل$

، $ص_م = \frac{١٢ك \times \frac{\sqrt{3}}{2}ل - ك \times \frac{\sqrt{3}}{3}ل}{١٢ك - ك} = \frac{١٧\sqrt{3}}{٣٣}ل$

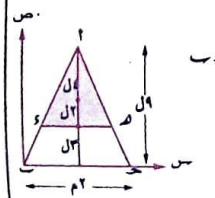
∴ ط θ = $\frac{٢٤\sqrt{3}}{٢٩}$

٣٤

① أولًا : (د) ثانيًا : (جـ) ② (ب)

إرشادات لحل رقم ٣٤

① ∵ $\overline{\text{ء د}}$ // $\overline{\text{حـ ب}}$



∴ Δ أ د ء ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ د ء}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ حـ ب}} = \left(\frac{٦ل}{٩ل}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

وبفرض كتلة Δ أ د ء = ٤ ك

∴ كتلة Δ أ ب حـ = ٩ ل

، كتلة شبه المنحرف ب حـ ء هـ = ٥ ل

وباختيار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ص}$

الكتلة	Δ أ ب حـ	Δ أ ء هـ
س	١	١
ص	٣ ل	٥ ل

∴ $ص_م = \frac{٩ل \times ٣ل - ٤ل \times ٥ل}{٩ل - ٤ل}$

$= \frac{٧ل^٢}{٥ل} = \frac{٧}{٥}$ ل متر

∴ مركز ثقل شبه المنحرف ب حـ هـ ء يبعد عن $\overline{ب حـ}$ مسافة $\frac{٧}{٥}$ ل (المطلوب أولًا)

بعد طى Δ أ هـ ء حول $\overline{هـ ء}$

بعد مركز ثقل المثلث أ هـ ء عن $\overline{ب حـ}$ = ٣ ل − ٢ ل = ل متر

الكتلة	Δ أ هـ ء	□ ب حـ هـ ء
س	١	١
ص	$\frac{٧}{٥}$ ل	ل

∴ $ص_م = \frac{٥ل \times \frac{٧}{٥}ل + ٤ل \times ل}{٥ل + ٤ل}$

$= \frac{١١ل^٢}{٩ل} = \frac{١١}{٩}$ ل متر (المطلوب ثانيًا)

② ∵ $\frac{\text{مساحة } \Delta أ ب حـ}{\text{مساحة } \Delta أ ء حـ} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ \times \text{جا } ٦٠°}{\frac{١}{٢} \times ٤ \times ل}$

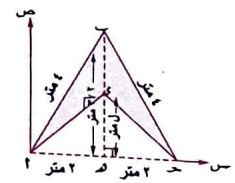
$= \frac{٢\sqrt{٣}}{ل}$

وبفرض كتلة Δ أ ب حـ = $٢\sqrt{٣}$ ل

∴ كتلة Δ أ ء حـ = ل ل

، ∵ ب هـ = $\sqrt{(٤)^٢ - (٢)^٢} = ٢\sqrt{٣}$ متر

وباختيار اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ص}$



الكتلة	Δ أ ب و	Δ أ حـ ب
س	٢	٢
ص	$\frac{٢}{٣}\sqrt{٣}$	$\frac{١}{٣}$ ل

∴ $ص_م = \frac{٢\sqrt{٣}ل \times \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} - ل \times \frac{١}{٣}ل}{(٢\sqrt{٣} - ل)ل}$

$= \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٣}ل^٢}{٢\sqrt{٣} - ل}$

، ∵ مركز ثقل الصفيحة أ ء حـ ب هى النقطة ء (٢ ، ل)

∴ $ل = \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٣}ل^٢}{٢\sqrt{٣} - ل}$

∴ $٤ - \frac{١}{٣}ل^٢ = ٢\sqrt{٣}ل^٢ - ل^٣$

∴ $\frac{٢}{٣}ل^٢ - ٢\sqrt{٣}ل + ٤ = ٠$

∴ $ل^٢ - ٣\sqrt{٣}ل + ٦ = ٠$

∴ $(ل - ٢\sqrt{٣})(ل - \sqrt{٣}) = ٠$

∴ ل = $٢\sqrt{٣}$ (مرفوض لأن ل < $٢\sqrt{٣}$)

أ ، ل = $\sqrt{٣}$

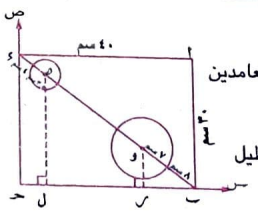
٣٥

باخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ص}$

، ∵ مساحة المستطيل

= ٣٠ × ٤٠

= ١٢٠٠ سم^٢



، مساحة الدائرة و = ٤٩ π سم^٢

مساحة الدائرة هـ = ١٢,٢٥ π سم^٢

∴ نفرض كتلة المستطيل = ١٢٠٠ ل

، كتلة الدائرة و = ٤٩ π ل

، وكتلة الدائرة هـ = ١٢,٢٥ π ل

ومن هندسة الشكل :

∴ $\frac{ب ر}{٣٠} = \frac{ب حـ}{٤٠} = \frac{١٥}{٥٠}$

∴ ب ر = ١٢ سم ومنها حـ ر = ٢٨ سم

، ر و = ٩ سم ∴ و (٢٨ ، ٩)

، ∵ $\frac{ل هـ}{٣٠} = \frac{ب ل}{٤٠} = \frac{٥٠ - ٧,٥}{٥٠}$

∴ ب ل = ٣٤ سم ومنها حـ ل = ٦ سم

، ل هـ = ٢٥,٥ ∴ هـ = (٦ ، ٢٥,٥)

الكتلة	١٢٠٠ ل	−٤٩ π ل	−١٢,٢٥ π ل
س	٢٠	٢٨	٦
ص	١٥	٩	٢٥,٥

$س_م = \frac{١٢٠٠ل \times ٢٠ - ٤٩\pi ل \times ٢٨ - ١٢,٢٥\pi ل \times ٦}{١٢٠٠ل - ٦١,٢٥\pi ل}$

$= ١٩,٣$

$ص_م = \frac{١٢٠٠ل \times ١٥ - ٤٩\pi ل \times ٩ - ١٢,٢٥\pi ل \times ٢٥,٥}{١٢٠٠ل - ٦١,٢٥\pi ل}$

$\approx ١٥,٥$

عندما يصبح $\overline{أ ب}$ أفقيًا فإن الخط الرأسى يكون عمودى على $\overline{أ ب}$

∴ نقطة التعليق تكون لها نفس الإحداثى الصادى لمركز الثقل

∴ نقطة التعليق هى (٤٠ ، ١٥,٥) بالنسبة لنقطة «حـ»

، عندما يصبح $\overline{أ ء}$ أفقيًا فإن الخط الرأسى يكون عمودى على $\overline{أ ء}$

∴ نقطة التعليق تكون لها نفس الإحداثى السينى لمركز الثقل

∴ نقطة التعليق هى (١٩,٣ ، ٣٠) بالنسبة لنقطة «حـ»

٣٦

ناخذ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ اتجاهين متعامدين

ونفرض أن وزن الصفيحة كلها = ١٢ و

فيكون وزن Δ أ ب هـ = Δ ء هـ حـ = ٣ و

ووزن Δ هـ ب حـ بعد تثبيت Δ أ هـ ء عليه = ٦ و

الكتل	أ	ب	حـ	ء	هـ
	و	٣ و	٣ و	و	٤ و
س	٠	٠	٢٤	٢٤	١٢
ص	١٨	٠	٠	١٨	٩

∴ $س_م$ (البُعد عن $\overline{أ ب}$) = $\frac{٧٢ و + ٢٤ و + ٤٨ و}{١٢ و}$

= ١٢ سم

، $ص_م$ (البُعد عن $\overline{ب حـ}$) = $\frac{١٨ و + ١٨ و + ٣٦ و}{١٢ و} = ٦$ سم

قياس زاوية ميل $\overline{ب حـ}$ على الرأسى = ى (Δ م حـ ن) = ى

حيث : ظا ى = $\frac{م ن}{حـ ن} = \frac{١}{٢}$

٣٧

ناخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftrightarrow{حـ س}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ص}$

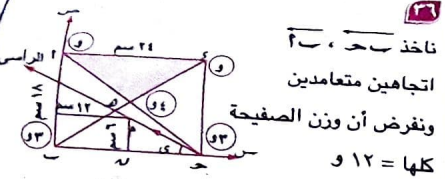
كتلة Δ ن أ ب

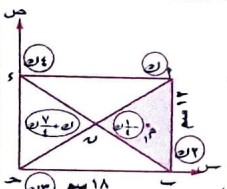
= $\frac{١}{٤}$ كتلة المستطيل = $\frac{١}{٤}$ ل

وتؤثر عند $م_١$ حيث :

$م_١ = \left(\frac{١٨ + ١٨ + ٩}{٣} ، \frac{١٢ + ٦ + ٠}{٣}\right) = (٦ ، ١٥)$

الكتلة	أ	ب	حـ	ء	ن	$م_١$
	ل	٢ ل	٣ ل	٤ ل	$\frac{١١}{٤}$ ل	$-\frac{١}{٤}$ ل
س	١٨	١٨	٠	٠	٩	١٥
ص	١٢	٠	٠	١٢	٦	٦





$$\therefore \text{س}_م = \frac{ل \times 18 + 2ل \times 18 + \frac{11}{4}ل \times 9 - \frac{1}{4}ل \times 15}{ل + 2ل + 3ل + 4ل + \frac{11}{4}ل - \frac{1}{4}ل} = 6$$

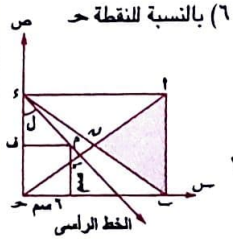
$$\text{، ص}_م = \frac{ل \times 12 + 4ل \times 12 + \frac{11}{4}ل \times 6 - \frac{1}{4}ل \times 6}{ل + 2ل + 3ل + 4ل + \frac{11}{4}ل - \frac{1}{4}ل} = 6$$

∴ مركز الثقل م = (٦ ، ٦) بالنسبة للنقطة حـ

● **عند التعليق من ء :**

يكون ظا ل = $\frac{\text{م ف}}{\text{ء ف}}$ = $\frac{6}{12-6}$ = 1

∴ ق (∠ ل) = ٤٥°



٣٨

مساحة Δ ا م ل

: مساحة المربع ا ب حـ ء

= $\frac{1}{2} \times 24 \times 24$: 48×48

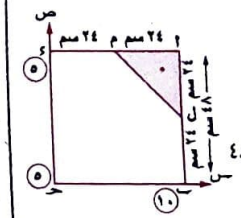
= ١ : ٨

∴ كتلة المثلث ا م ل = $\frac{1}{8} \times 40$ = ٥ جم

ومركز ثقله = $\left(\frac{24+48+24}{3}, \frac{48+48+24}{3}\right)$

= (٤٠ ، ٤٠)

∴ الكتلة عند ب = ١٠ جم ، عند ء ، حـ = ٥ جم



ك	ب	حـ	ء	المربع	المثلث
ص	٠	٠	٤٨	٢٤	٤٠
س	٤٨	٠	٠	٢٤	٤٠
	١٠	٥	٥	٤٠	-٥

$$\therefore \text{س}_م = \frac{10 \times 48 + 40 \times 24 - 40 \times 5}{10 + 5 + 40 - 5} = \frac{248}{11}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{10 \times 48 + 40 \times 24 - 40 \times 5}{10 + 5 + 40 - 5} = \frac{200}{11}$$

∴ ظا هـ = $\frac{25}{31}$

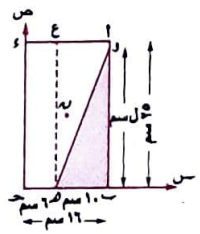
٣٩

ناخذ الاتجاهين المتعامدين

$\overleftrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ص}}$

ونفرض أن طول $\overline{\text{ب و}}$

= ل سم



∴ $\frac{\text{مساحة سطح المستطيل ا ب حـ ء}}{\text{مساحة سطح Δ ب هـ و}} = \frac{16 \times 25}{\frac{1}{2} \times 10 \times \text{ل}} = \frac{80}{\text{ل}}$

∵ الصفيحة على وشك الدوران حول النقطة هـ

∴ الصفيحة تعتبر فى وضع رأسى وكان $\overline{\text{حـ هـ}}$ أفقيًا

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى من الصفيحة يقع على الخط الرأسى المار بالنقطة (هـ) أى على العمود $\overline{\text{ع هـ}}$

ويفرض أن كتلة المستطيل = ٨٠ ك وتؤثر عند ل

حيث : ل = $\left(8 ، \frac{25}{2}\right)$

، كتلة Δ و ب هـ = ل ك وتؤثر عند م$_1$ حيث

م$_1$ تبعد عن $\overline{\text{ع حـ}}$ بمقدار = $\frac{16+16+6}{3} = \frac{38}{3}$

$$\therefore \text{س}_م = \frac{80 \text{ ك} \times 8 - \text{ل ك} \times \frac{38}{3}}{80 \text{ ك} - \text{ل ك}}$$

ولكن س$_م$ = ٦ لأن م $\in$ $\overline{\text{ع هـ}}$

$$\therefore 6 = \frac{80 \times 8 - \text{ل} \times \frac{38}{3}}{80 - \text{ل}}$$

∴ ٦ × ٨٠ − ٦ ل = ٨٠ × ٨ − $\frac{38}{3}$ ل

∴ $\frac{20}{3}$ ل = ٨٠ × ٢ ∴ ل = ٢٤ سم

∴ ب و = ٢٤ سم

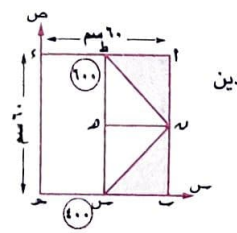
٤٠

نختار الاتجاهين المتعامدين

$\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

مركز ثقل Δ ا ب ط

= $\left(\frac{60+60+30}{3}, \frac{60+30+60}{3}\right)$ = (٥٠ ، ٥٠)



، مركز ثقل Δ ب هـ س

= $\left(\frac{60+60+30}{3}, \frac{30+0+30}{3}\right)$ = (١٠ ، ٥٠)

، مركز ثقل Δ هـ س د

= $\left(\frac{60+30+30}{3}, \frac{30+0+30}{3}\right)$ = (٢٠ ، ٤٠)

، مركز ثقل Δ هـ د ط =

$\left(\frac{60+30+30}{3}, \frac{30+30+60}{3}\right)$ = (٤٠ ، ٤٠)

مساحة المربع : مساحة Δ ا هـ ط : مساحة Δ ب هـ س

= ٦٠ × ٦٠ : $\frac{1}{2} \times 30 \times 30$: $\frac{1}{2} \times 30 \times 30$

= ٨ : ١ : ١

، لكن وزن الصفيحة ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم

∴ نفرض أن وزن المثلث ا هـ ط = ١٢٥ ث جم

، نفرض أن وزن المثلث ب هـ س = ١٢٥ ث جم

ك	١٠٠٠	-١٢٥	-١٢٥	١٢٥	١٢٥	٦٠٠	٤٠٠
س	٣٠	٥٠	٥٠	٤٠	٤٠	٣٠	٣٠
ص	٣٠	٥٠	١٠	٤٠	٢٠	٦٠	٠

∴ س$_م$ =

$$\frac{1000 \times 30 - 50 \times 125 - 50 \times 125 + 50 \times 125 + 40 \times 125 + 40 \times 60 + 30 \times 60 + 30 \times 40}{1000 - 125 - 125 + 125 + 125 + 125 + 600 + 400}$$

= ٢٨,٧٥

، ص$_م$ =

$$\frac{1000 \times 30 - 50 \times 125 - 50 \times 125 + 10 \times 125 + 40 \times 125 + 20 \times 125 + 60 \times 60}{1000 - 125 - 125 + 125 + 125 + 125 + 600 + 400}$$

= ٣٣

∴ مركز الثقل = (٢٨,٧٥ ، ٣٣) بالنسبة لنقطة حـ

الاستاتيكا
الرياضيات التطبيقية

الآن بالمكتبات

المعاصر في:

- الديناميكا
- الجبر و الهندسة الفراغية
- التفاضل و التكامل
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

الجزء الخاص بالإجابات
يصرف مجاناً مع الكتاب



مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقي-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢/٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com

/ElMoasser.eg

6 223007 310635